Estudio de funciones

1. Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}}$$

Solución:

- Dominio = **R** – {–1, 1}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 0)$

  Con el eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0, 0)$

- Asíntotas verticales: $x = -1,\; x = 1$

  $$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

  Asíntota oblicua:

  $\dfrac{x^3}{x^2-1} = x + \dfrac{x}{x^2-1} \;\Rightarrow\; y = x$ es asíntota oblicua.

  Si $x \to +\infty,\; \dfrac{x}{x^2-1} > 0 \;\Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

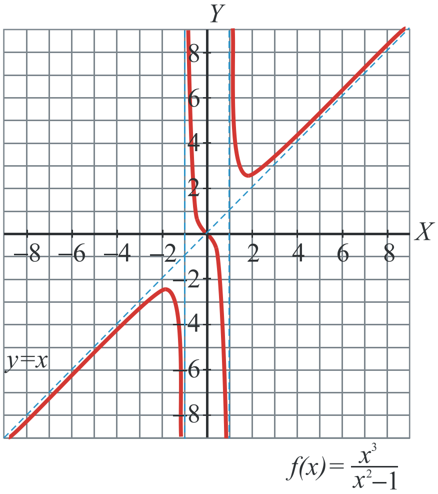
  Si $x \to -\infty,\; \dfrac{x}{x^2-1} < 0 \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

  $$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (0, 0) \\ x = -\sqrt{3} & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad \left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \\ x = \sqrt{3} & \rightarrow \quad \text{Punto} \quad \left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

- Gráfica:



2. Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1}}$$

Solución:

- Dominio:

  $x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

  Dominio $= \mathbf{R} - \{-1\}$

- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \frac{x^3}{x^2+2x+1} = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0, 0)$$

$$\text{Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto}(0, 0)$$

- Asíntota vertical: $x = -1$

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1} = \frac{x^3}{(x+1)^2}; \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$$

  Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{x^2+2x+1} = x - 2 + \frac{3x+2}{x^2+2x+1} \;\Rightarrow\; y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua}$$

.

$$\text{Si } x \to +\infty,\; \frac{3x+2}{x^2+2x+1} > 0 \;\Rightarrow\; \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \to -\infty,\; \frac{3x+2}{x^2+2x+1} < 0 \;\Rightarrow\; \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+2x+1)-x^3(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{3x^4+6x^3+3x^2-2x^4-2x^3}{(x^2+2x+1)^2}=$$

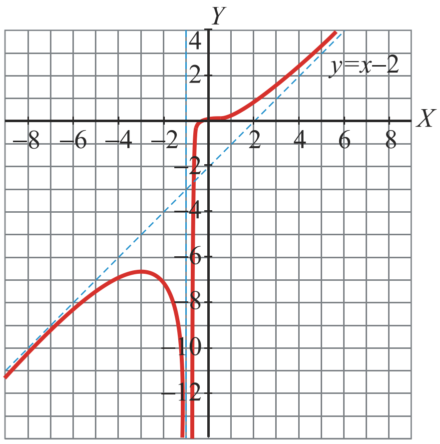
$$=\frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x^2+2x+1)^2}=\frac{x^2(x^2+4x+3)}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\ \begin{cases} x^2=0 \ \Rightarrow\ x=0 \ \rightarrow\ \text{Punto}\,(0,\,0) \\ x^2+4x+3=0 \ \Rightarrow\ x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{-4\pm 2}{2}\ \begin{cases} x=-3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$x=-1$ no vale, pues no está en el dominio.

Punto $\left(-3,\ \dfrac{-27}{4}\right)$.

- Gráfica:



$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$

3. Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x^2}{x^2-4}}$$

Solución:

- Dominio = **R** – {–2, 2}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje X $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $\dfrac{2x^2}{x^2-4}=0$ $\rightarrow$ $2x^2=0\rightarrow x=0$ $\rightarrow$ Punto $(0,\,0)$

  Con el eje Y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ Punto $(0,\,0)$

- Asíntotas verticales: $x=-2,\ x=2$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty;$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty;$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

Asíntota horizontal: $y = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$

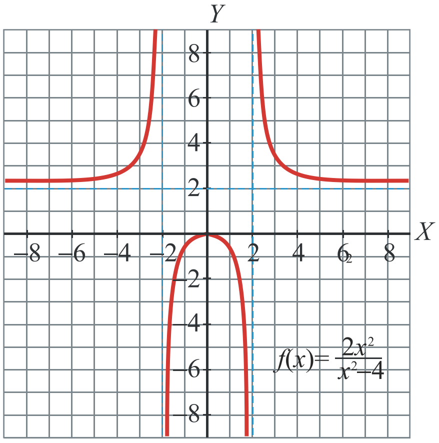
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-4) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0,\ 0)$

- Gráfica:



4. Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbf{R}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0,\ 0)$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0,\ 0)$

- No tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $y = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, con $y < 1$

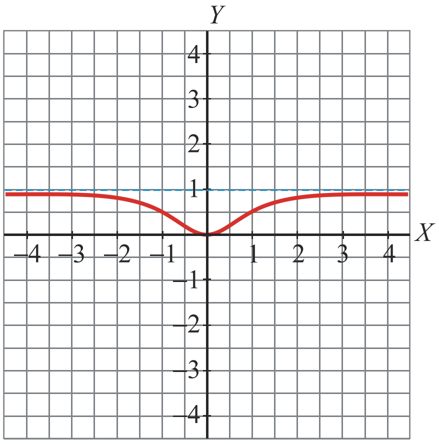
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, con $y < 1$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 0)$$

- Gráfica:



5. Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {–1, 1}

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1}=0 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow$
  $\rightarrow$ Puntos $(2,\ 0)$ y $(-2,\ 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=4 \rightarrow$ Punto $(0,\ 4)$

- Asíntotas verticales: $x=-1,\ x=1$

  $\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

  $\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

  Asíntota horizontal: $y=1$

  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=10,$ con $y<1$

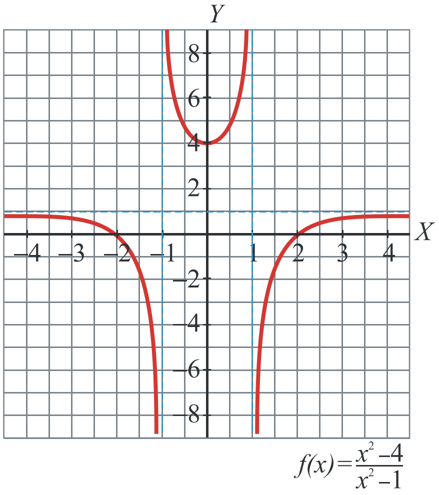
  $\lim_{x\to -\infty} f(x)=1,$ con $y<1$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0,\ 4)$

- Gráfica:



6. Dada la función

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio = **R** − {0}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ No corta al eje X.
  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x = 0$ no pertenece al dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

- Asíntota horizontal: $x = 2$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2,$ con $y > 2$

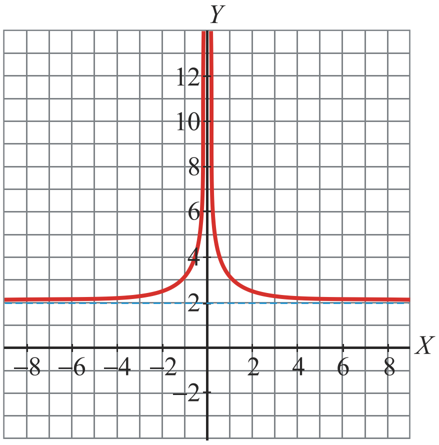
  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2,$ con $y > 2$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2+1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 - 4x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$

7. Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x+1}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {–1}

- Puntos de corte con los ejes:

  $\text{Con el eje } X \rightarrow \; y = 0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{x+1} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,0)$

  $\text{Con el eje } Y \rightarrow \; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}(0,0)$

- Asíntotas verticales: $x = -1$

  $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

- Asíntota oblicua:

  $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} \;\Rightarrow\; y = x - 1 \text{ es asíntota oblicua.}$

  $\text{Si } x \rightarrow +\infty, \; \frac{1}{x+1} > 0 \;\Rightarrow \text{La curva está por encima de la asíntota.}$

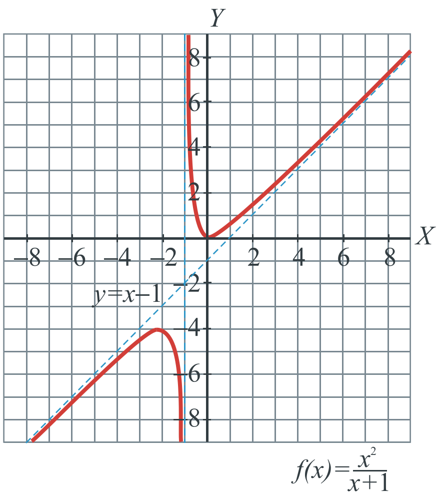
  $\text{Si } x \rightarrow -\infty, \; \frac{1}{x+1} < 0 \;\Rightarrow \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x(x+2)=0\begin{cases} x=0 & \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\ 0) \\ x=-2 & \rightarrow \quad \text{Punto } (-2,\ -4) \end{cases}$$

- Gráfica:



8. Estudia y representa la función:

$$\boldsymbol{f(x)=x^4-2x^2}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^2\right)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^2\right)=+\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

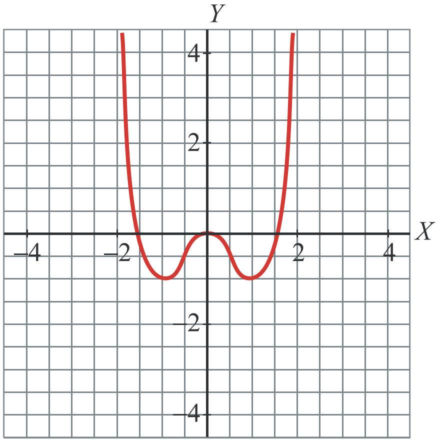
$$\text{Con el eje } X \rightarrow \quad x^4-2x^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(x^2-2\right)=0 \begin{cases} x=-\sqrt{2} \ \rightarrow \ \text{Punto } (-\sqrt{2},\ \ 0) \\ x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto } (0,\ 0) \\ x=-\sqrt{2} \ \rightarrow \ \text{Punto } (-\sqrt{2},\ \ 0) \end{cases}$$

$$\text{Con el eje } Y \ \rightarrow x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,0)$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)=0 \ \begin{cases} x=-1 \ \rightarrow \ \text{Punto } (-1,\ -1) \\ x=0 \rightarrow \ \text{Punto } (0,\ 0) \\ x=1 \ \rightarrow \ \text{Punto } (1,\ -1) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x)=x^4-2x^2$

9. Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-4x^2+4x\right)=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2+4x\right)=-\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

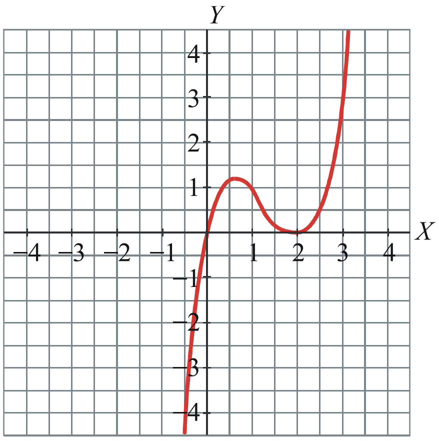
Con el eje $X \to \quad x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4)=0 \begin{cases} x=0 \quad \to \quad \text{Punto} \quad (0,\,0) \\ x=2 \quad \to \quad \text{Punto} \quad (2,\,0) \end{cases}$

- Puntos singulares:

$f'(x)=3x^2-8x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}=\dfrac{8\pm 4}{6}\begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Puntos $(2,\,0)$ y $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{32}{27}\right)$.

- Gráfica:



$f(x)=x^3-4x^2+4x$