Actividades propuestas

Variable aleatoria

1. Determina si la variable aleatoria dada a continuación es discreta o continua:

a) **La duración de un viaje en avión.**

b) **El número de personas que hay en una parada de autobús.**

c) **La duración de un semáforo en rojo.**

d) **Porcentaje de realización de una obra.**

a) Continua.

b) Discreta.

c) Continua.

d) Continua.

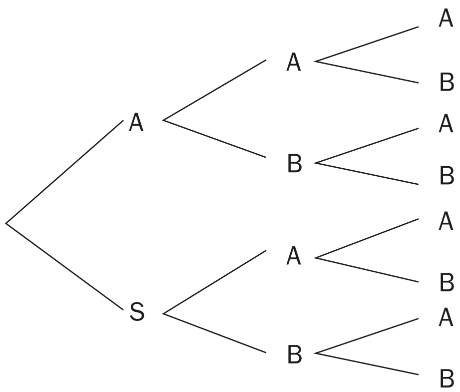
2. Un estudiante realiza cuatro exámenes que puede aprobar o suspender. Se considera la variable aleatoria *x* = «número de exámenes aprobados». Entonces:

a) **Calcula el espacio muestral de este experimento.**

b) **Construye una tabla con los resultados y los valores asignados de la variable aleatoria.**

a) Sean A y S los sucesos que representan si aprueba y suspende, respectivamente, un examen este estudiante.

Si realiza tres exámenes el diagrama de árbol de este experimento es el siguiente:



El espacio muestral es:

$$E = \{AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS\}$$

b) La variable aleatoria x puede tomar los valores 0, 1, 2 o 3. Por tanto, la tabla de resultados y los valores asignados es la siguiente:

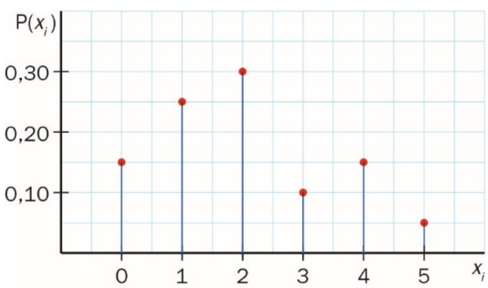
Resultado	*SSS*	*ASS,SAS,SSA*	*AAS, ASA, SAA*	*AAA*
Valores	0	1	2	3

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

3. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta es:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,15	0,25	0,30	0,10	0,15	0,05

Representa su gráfica y calcula: $P(x \le 3)$, $P(1 < x \le 4)$, $P(x > 3)$



- $P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}10 = 0{,}80$
- $P(< x \leq 4) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 0{,}30 + 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}55$
- $P(x > 3) = P(x=4) + P(x=5) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20$

4. El número de habitaciones ocupadas en un hotel de 8 habitaciones en temporada baja y sus probabilidades respectivas se dan en la tabla. Calcula e interpreta la media y la desviación típica.

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	0,20	0,30	0,35	0,10	0,05

$$\mu = E\left[x\right] = \sum_{i=2}^{6} x_i \cdot P(x_i) = 2 \cdot 0{,}20 + 3 \cdot 0{,}30 + 4 \cdot 0{,}35 + 5 \cdot 0{,}10 + 6 \cdot 0{,}05 = 3{,}5$$

El número medio de habitaciones ocupadas en este hotel en temporada baja es de 3,5.

- $E\left[x^2\right] = \sum_{i=2}^{6} x_i^2 \cdot P(x_i) = 4 \cdot 0{,}20 + 9 \cdot 0{,}30 + 16 \cdot 0{,}35 + 25 \cdot 0{,}10 + 36 \cdot 0{,}05 = 13{,}4$
- $\sigma = \sqrt{E\left[x^2\right] - \mu^2} = \sqrt{13{,}4 - (3{,}5)^2} = 1{,}07$

La variabilidad del número de habitaciones ocupadas es de 1,07.

Distribución binomial

5. Un examen de Geología consta de 8 preguntas de opción múltiple. Cada pregunta dispone de cuatro posibles respuestas, de la cuales solo una es la correcta. Para aprobar el examen hay que responder correctamente al menos a 5 preguntas. Si un estudiante no sabe las respuestas y las responde al azar:

a) **Halla la probabilidad de que responda a 5 preguntas correctamente.**

b) **Determina la probabilidad de que apruebe el examen.**

Sea la variable aleatoria x = "número de respuestas correctas" que sigue una distribución binomial de parámetro n = 8 y $p = \frac{1}{4}$, es decir, $x \sim B\left(8, \frac{1}{4}\right)$.

La función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{8}{x} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{8-x}, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$$

a) La probabilidad de que responda a cinco preguntas correctamente es:

$$p(x=5)=\binom{8}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=0,0231 \text{ o } 2,31\%$$

b) Para que apruebe el examen debe responder correctamente al menos a 5 preguntas. Así:

$$p(x\geq 5)=p(5)+p(6)+p(7)+p(8)=\binom{8}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^3+\binom{8}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+$$

$$+\binom{8}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^8=0,0273 \text{ o } 2,73\ \%$$

La probabilidad de que apruebe el examen respondiendo al azar es del 2,73 %.

6. Se lanza seis veces una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara es el doble de la de obtener cruz. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el mismo número de caras que de cruces? ¿Y la probabilidad de obtener más caras que cruces?

Sean p la «probabilidad de obtener cara» y q la «probabilidad de obtener cruz».

Entonces:

$p = 2\,q$. y, además, $p + q = 1$.

Luego

$$2q+q=1\Rightarrow q=1/3 \text{ y } p=2/3.$$

Consideremos la variable aleatoria x 0 «número de casos obtenidos al lanzar la moneda trucada» que sigue una distribución binomial de parámetro n = 6 y $p=2/3$, es decir, $x\sim B\left(6,\frac{2}{3}\right)$.

La función de probabilidad es:

$$p(x)=\binom{6}{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6-x},\ x=0,\ \ldots,\ 6$$

Si queremos obtener el mismo número de caras que de cruces habría que obtener 3 caras y 3 cruces. Luego, la probabilidad de obtener 3 caras es:

$$p=(x=3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{160}{729}=0,2195 \text{ o } 21,95\ \%$$

Hay un 21,95 % de obtener el mismo número de caras que de cruces en esta moneda trucada.

Por otro lado, para obtener más caras que cruces habrá que obtener 4 caras o más. Es decir:

$$p(x > 4) = p(x = 5) + p(x = 6) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{256}{729} = 0{,}3512$$

Hay una probabilidad del 35,12 % de obtener más caras que cruces con esta moneda.

7. El 10 % de los teléfonos móviles de un modelo de una marca determinada se estropea durante el periodo de garantía. De ellos, el 70 % se puede reparar, mientras que el otro 30 % tiene que ser reemplazado por uno nuevo. Si una empresa compra 20 teléfonos de ese modelo y de esa marca, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos dos de ellos, tengan que ser reemplazados por uno nuevo durante el periodo de garantía?

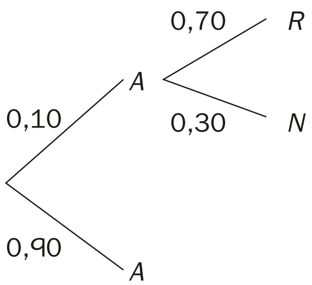
Sean los siguientes sucesos:

A = «el teléfono se avería»

R = «el teléfono se repara»

N = «el teléfono se sustituye por uno nuevo»

El proceso consiste en analizar, en primer lugar, si el móvil se avería o no durante el periodo de garantía y, posteriormente, si se ha averiado, ofrece reparación o reemplazamiento por uno nuevo. Así, un diagrama de árbol que represente este esquema es:



La posibilidad de que un teléfono móvil se averíe y tenga que ser reemplazado por uno nuevo es:

$$p(A \cap N) = p(A) \cdot (N / A) = 0{,}10 \cdot 0{,}30 = 0{,}03$$

La variable aleatoria x = «número de teléfono averiado y reemplazado por uno nuevo» sigue una distribución binomial de parámetro n = 20 y p = 0,03, es decir, $x \sim B(20,\ 0{,}03)$, cuya función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{20}{x} \cdot (0{,}03)^x \cdot (0{,}97)^{20-x},\ x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 20$$

Por tanto, la probabilidad de que, al menos dos teléfonos de los comprados por esta empresa, tengan que ser reemplazados por unos nuevos porque se hayan averiado es:

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - \left[p)0) + p(1)\right] = 1 - \left[(0{,}97)^{20} + \binom{20}{1} \cdot (0{,}03) \cdot (0{,}97)^{19}\right] =$$

$$= 0{,}1198 \text{ o } 11{,}98\ \%$$

8. Tratamiento para la depresión. **Los pacientes en estado depresivo que toman un determinado tratamiento consiguen una mejora en el 75 % de los casos, en un 10 % no les produce ningún efecto y el resto de pacientes empeora. En una muestra de 10 pacientes que toman este tratamiento, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres mejoren? ¿Y la mitad?**

Sea la variable aleatoria *x* = número de pacientes que reciben este tratamiento y mejoran». Entonces, x sigue una distribución binomial de parámetros *n* = 10 y *p* = 0,75, es decir, $x \sim B(10, 0{,}75)$.

La función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{10}{x} \cdot (0{,}75)^x \cdot (0{,}25)^{10-x},\ x = 0, 1, \ldots, 10$$

La probabilidad de que al menos tres pacientes mejoren es:

$$p(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - \left[p(0) + p(1) + p(2)\right] = 1 - \left[(0{,}25)^{10} + 10(0{,}75)(0{,}25)^9 + \binom{10}{2}(0{,}75)(0{,}25)^8\right] =$$

$$= 0{,}9996 \text{ o } 99{,}96\ \%$$

Por otro lado, la probabilidad de que mejoren la mitad es:

$$p(x = 5) = \binom{10}{5} \cdot (0{,}75)^5 \cdot (0{,}25)^5 = 0{,}0584 \text{ o } 5{,}84\ \%$$

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua

9. *Check in.* **El tiempo en minutos que tarda una persona en registrarse (*check in*) en un hotel es una variable aleatoria continua que tiene por función de densidad $f(x) = \frac{1}{7}$ si $8 < x < 15$. Calcula:**

a) **¿Cuál es la probabilidad de que una persona tarde en registrarse en este hotel más de 10 minutos?**

b) **¿Y entre 10 y 12 minutos?**

Como la función de densidad está definida si 8 < x < 15, entonces que una persona tarde en registrarse más de 10 minutos es equivalente a que tarde un tiempo x comprendido entre 10 y 15 minutos, es decir, 10 < x < 15. Por tanto,

$$p(x>10)=p(10<x<15)=\int_{10}^{15}\frac{1}{7}dx=\left[\frac{1}{7}x\right]_{10}^{15}=\frac{15}{7}-\frac{10}{7}=\frac{5}{7}=0,7143 \text{ o } 71,43\ \%$$

Por su parte, la probabilidad de que una persona tarde en registrarse entre 10 y 12 minutos es:

$$p(10<x<12)=\int_{10}^{12}\frac{1}{7}dx=\left[\frac{1}{7}x\right]_{10}^{12}=\frac{2}{7}=0,2857$$

10. El tiempo en minutos que un taxi está en la parada de una estación de tren es una variable aleatoria con función de densidad:

$$\boldsymbol{f(t)=0,1e^{-0,1t} \qquad t>0}$$

a) **¿Cuál es la probabilidad de que un taxi espere menos de 15 minutos en la parada de la estación?**

b) **¿Cuánto tiempo pasan en la parada de taxis el 10 % de los que más esperan?**

a) La probabilidad de que un taxi espere menos de 15 minutos en la parada de la estación es:

$$p(x<15)=\int_{10}^{15}0,1\cdot e^{-0,1t}\,dt=\left[-e^{-0,1t}\right]_{0}^{15}=-e^{-1,5}+e^{0}=1-e^{-1,5}=0,7769 \text{ o } 77,69\ \%$$

b) Sea k el tiempo en minutos que pasa un taxi si se encuentra en el 10% de los que más esperan. Entonces,

$$p(t>k)=0,10 \Leftrightarrow p(t\le k)=0,90$$

Luego,

$$p(t\le k)=\int_{0}^{k}0,1\cdot e^{-0,1t}\,dt=\left[-e^{-0,1t}\right]_{0}^{k}=1-e^{-0,1k}$$

Por tanto,

$$1-e^{-0,1k}=0,90 \Rightarrow e^{-0,1k}=0,10 \Rightarrow -0,1k=\ln(0,10) \Rightarrow k=-\frac{\ln(0,10)}{0,1}\simeq 23$$

El 10 % de los taxis que más esperan en la parada de la estación estarán aproximadamente más de 23 minutos.

Distribución normal

11. **Se estima que las precipitaciones en los últimos cien años en España se pueden modelar por una distribución normal de media 628 l/m² y desviación típica 125 l/m². Se considera que las precipitaciones son escasas si son inferiores a 500 l/m², normales si oscilan entre 500 y 1 000 l/m², y abundantes si superan los 1000 l/m². Calcula el número de años en los que las precipitaciones fueron escasas y normales.**

Sea la variable aleatoria x = «precipitación en España en los últimos cien años en l/m²», que sigue una distribución normal de media μ = 628 l/m² y desviación típica σ = 125 l/m², es decir,

$x \sim N(628, 125)$.

La variable tipificada es:

$$z = \frac{x-628}{125} \sim N(0,1)$$

Las precipitaciones fueron escasos si su número es inferior a 500 l/m². Por tanto,

$$p(x < 500) = p\left(\frac{x-628}{125} < \frac{500-628}{125}\right) = p(z < -1,02) = p(z > 1,02) = 1 - p(z \leq 1,02) =$$
$$= 1 - 0,8461 = 0,1539 \text{ o } 15,39\ \%$$

Durante 15 años las precipitaciones fueron escasas.

Por su parte, las precipitaciones fueron normales si su número osciló entre 200 y 1000 l/m². Luego,

$$p(500 < x < 1000) = p\left(\frac{500-628}{125} < \frac{x-628}{125} < \frac{1000-628}{125}\right) =$$
$$= p(-1,02 < z < 2,98) = p(z < 2,98) - p(z - 1,02) =$$
$$= 0,9986 - 0,1539 = 0,8447 \text{ o } 84,47\ \%$$

Pueden considerarse que durante 84 años las precipitaciones fueron normales.

12. **El diámetro de las cerezas de una zona determinada se distribuye según una ley normal de media $\mu = 2$ cm y desviación típica $\sigma = 0,2$ cm. Se rechazan aquellas cerezas cuyo diámetro difiere de la media en más de 1,5 σ. ¿Qué porcentaje se rechazará?**

Si el diámetro de las cerezas viene representado por la variable aleatoria x, entonces $x \sim N(2, 0,2)$ y, por tanto, la variable tipificada es: $z = \dfrac{x-2}{0,2} \sim N(0,1)$.

Se rechazarán aquellas cerezas tales que $|x - \mu| > 1,5\sigma$. Es decir:

$|x-2| > 0,3 \Rightarrow x-2 < -0,3 \quad \text{o} \quad x-2 > 0,3$

$\Rightarrow x < 1,7 \quad \text{o} \quad x > 2,3$

Por tanto, se rechazarán aquellas cerezas cuyo diámetro sea inferior a 1,7 cm o superior a 2,3 cm.

$$p(x<1,7)+p(x>2,3)=p\left(\frac{x-2}{0,2}<\frac{1,7-2}{0,2}\right)+p\left(\frac{x-2}{0,2}>\frac{2,3-2}{0,2}\right)$$

$$=p(z<-1,5)+p(z>1,5)=2p(z>1,5)=2\left(1-p(z\le 1,5)\right)=$$

$$=2(1-0,9332)=0,1336$$

Se rechazan, pues, el 13,36 % de las cerezas.

13. Las calificaciones de los 900 aspirantes para obtener una plaza en un grado universitario pueden considerarse que siguen una distribución normal de media 3,8 y desviación típica 1,5.

a) **¿Cuántos aspirantes han aprobado, es decir, han obtenido una calificación igual o superior a 5?**

b) **Si solo hay 90 plazas, ¿cuál es la calificación mínima para obtenerla?**

La variable aleatoria *x* = «calificación de los aspirantes» sigue una distribución normal de media μ = 3,8 y desviación típica $\sigma = 1,5$, es decir, $x \sim N(3,8,\ 1,5)$.

La variable tipificada es:

$$z=\frac{x-3,8}{1,5}\sim N(0,1).$$

a) $$p(x\ge 5)=p\left(\frac{x-3,8}{1,5}\ge\frac{5-3,8}{1,5}\right)=p(z\ge 0,8)=1-p(z<0,8)=1-0,7881=0,2110$$

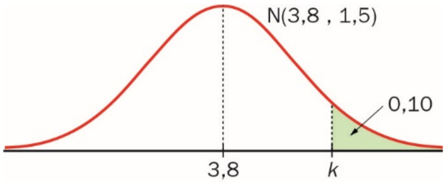
Luego,

$0,2110\cdot 900 \simeq 190$

Aprobaron 190 aspirantes.

b) Se trata de encontrar un valor k que deja a la derecha un área igual a 0,10 puesto que $\frac{90}{900}=0,10$.

Es decir:



$p(x > k) = 0{,}10$

O lo que es equivalente,

$p(x \leq k) = 0{,}90$

Luego,

$$p\left(\frac{x-3{,}8}{1{,}5} \leq \frac{k-3{,}8}{1{,}5}\right) = 0{,}90 \Rightarrow$$

$$p\left(z \leq \frac{k-3{,}8}{1{,}5}\right) = 0{,}90 \Rightarrow \frac{k-3{,}8}{1{,}5} = 1{,}28 \Rightarrow k = 5{,}72$$

La calificación mínima para obtener plaza es de un 5,72.

14. Consumo de televisión. El consumo televisivo por persona y día en nuestro país se puede ajustar mediante una ley normal de media 240 minutos y desviación típica de 30 minutos.

a) **Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea menos de 3 horas la televisión?**

b) **¿Cuántos minutos dedican a ver la televisión el 25 % de los que más tiempo pasan delante de la pantalla?**

Consideremos la variable aleatoria x = «consumo en minutos de televisión por persona y día» que sigue una distribución normal de media μ = 240 minutos y desviación típica 30 minutos, es decir, $x \sim N(240, 30)$.

Por tanto, la variable tipificada es:

$$z = \frac{x-240}{30} \sim N(0,1)$$

a)

$$p(x < 180) = p\left(\frac{x-240}{30} < \frac{180-240}{30}\right) = p(z > 2) = 1 - p(z \leq 2) =$$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 \text{ o } 2{,}28\ \%$$

La probabilidad de que una persona vea menos de 3 horas de televisión es del 2,28 %.

b) Hay que encontrar un valor *k* tal que

$p(x \geq k) = 0{,}25$

O lo que es su equivalente,

$p\ (x < k) = 0{,}75$

Luego,

$$p\left(\frac{x-240}{30} < \frac{k-240}{30}\right) = 0{,}75 \Rightarrow p\left(z < \frac{k-240}{30}\right) = 0{,}75 \Rightarrow \frac{k-240}{30} = 0{,}67 \Rightarrow k \simeq 260$$

El 25 % de los que ven más televisión diariamente dedican más de 260 minutos, o sea, 4 horas y 20 minutos.

15. **Durante un año se ha analizado la duración de los vuelos directos entre Barcelona y Palma y se puede considerar que sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si el 90 % de los vuelos duran menos de 50 minutos y el 25 %, menos de 43 minutos, ¿cuáles son los valores de μ y σ?**

Si x = «duración en minutos del vuelo directo entre Barcelona y Palma», entonces $x \sim N(\mu, \sigma)$.

La variable tipificada es:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Por un lado, si el 90 % de los vuelos duran menos de 50 minutos, entonces:

$$p(x < 50) = 0{,}90 \Rightarrow p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90 \Rightarrow p\left(z < \frac{50-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{50-\mu}{\sigma} = 1{,}28 \Rightarrow 50-\mu = 1{,}28\sigma \quad (1).$$

Por otro lado, si el 25 % de los vuelos dura menor de 43 minutos, entonces:

$$p(x < 43 = 0{,}25 \Rightarrow p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{43-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \Rightarrow p\left(z < \frac{43-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \frac{43-\mu}{\sigma} = -0{,}67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 43-\mu = -0{,}675 \qquad (2)$$

D (1) y (2) deducimos que μ=0 45,4 minutos y σ= 3,59 minutos.

16. **Las calificaciones de Matemáticas II en las pruebas de EBAU de un año en una comunidad autónoma puede considerarse que siguen una distribución normal N(5,5, 2,3).**

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido más de 9 puntos.

b) Si se presentaron 6500 estudiantes, ¿cuántos obtuvieron una calificación inferior a 5 puntos?

Si x = «calificación en Matemáticas II», entonces $x \sim N(5,6;\ 2,3)$ y la variable tipificada:

$$z = \frac{x-5,6}{2,3} \sim N(0,1)$$

a) $$p(x>9) = p = \left(\frac{x-5,6}{2,3} > \frac{9-5,6}{2,3}\right) = p(z>1,52) = 1-p(z\le 1,52) = 1-0,9357 =$$

$$= 0,0643 \text{ o } 6,43\ \%$$

La probabilidad de que un estudiante obtuviera una calificación superior a 9 puntos es del 6,43 %.

b) $$p(x>5) = p\left(\frac{x-5,6}{2,3} < \frac{5-5,6}{2,3}\right) = p(z<-0,22) = p(z>0,22) = 1-p(z\le 0,22) =$$

$$= 1-0,5871 = 0,4129$$

Luego,

$$0,4129\cdot 6500 \simeq 2684$$

Obtuvieron una calificación inferior a 5 puntos un total de 2684 estudiantes de los 6500 presentados.

17.*Call center.* La duración de las llamadas recibidas en un centro de llamadas o *call center* de una compañía de gas sigue una distribución normal de media 10 minutos y desviación típica 3 minutos.

a) Halla la probabilidad de que una llamada recibida dure más de 15 minutos.

b) ¿Cuál es la duración mínima del 10 % de las llamadas que tienen mayor duración?

Sea la variable aleatoria x = «duración, en minutos, de las llamadas recibidas», entonces x sigue una distribución normal de media μ = 10 minutos y desviación típica σ = 3 minutos, es decir, $x \sim N(10,3)$.

Luego, la variable tipificada es:

$$z = \frac{x-10}{3} \sim N(0,1).$$

a) $$p(x>15) = p\left(\frac{x-10}{3} > \frac{15-10}{3}\right) = p(z>1,67) = 1-p(z\le 1,67) = 1-0,9525 =$$

$$= 0,0475 \text{ o } 4,75\ \%$$

La probabilidad de que una llamada dura más de 15 minutos es del 4,75 %.

b) Tenemos que encontrar un valor k tal que $p(x \geq k) = 0{,}10$. O lo que es lo mismo, $p(x < k) = 0{,}90$.

Luego,

$$p\left(\frac{x-10}{3} < \frac{k-10}{3}\right) = p\left(z < \frac{k-10}{3}\right) = 0{,}90 \Rightarrow \frac{k-10}{3} = 1{,}28 \Rightarrow k = 13{,}84$$

La duración mínima del 10 % de las llamadas que tienen mayor duración es de 13,84 minutos.

18. Una variable aleatoria *x* sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$. Se conoce que $P(x \leq 10) = 0{,}67$ y que $P(x \leq 12) = 0{,}937$.

a) Encuentra μ y σ.

b) Calcula $P(|x-\mu| < \sigma)$.

Si $x \sim N(\mu,\sigma)$, entonces la variable tipificada

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

a) Por un lado,

$$p(x \leq 10) = 0{,}67 \Rightarrow p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\left(z \leq \frac{10-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}67 \Rightarrow \frac{10-\mu}{\sigma} = 0{,}44 \Rightarrow 10-\mu = 0{,}44\sigma \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$p(x \leq 12) = 0{,}937 \Rightarrow p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}937 \Rightarrow p\left(z \leq \frac{12-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}937 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12-\mu}{\sigma} = 1{,}53 \Rightarrow 12-\mu = 1{,}53\sigma \qquad (2)$$

Al resolver el sistema formado por (1) y (2) resulta:

$\mu = 9{,}19$ y $\sigma = 1{,}83$

b) $|x-\mu| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-\mu < 5 \Leftrightarrow \mu-5 < x < \mu+\sigma$

En toda distribución normal $N(\mu, \sigma)$ en el intervalo (μ-5, μ + 5) se encuentra el 68,27 % de los datos. Por tanto,

$p\left(\left|x-\mu\right|<\sigma\right)=0,6827$.

Aproximación normal de la distribución binomial

19. Zapatillas para *runners*. El 60 % de las zapatillas para correr tienen un peso que supera los 300 g. En una muestra de 200 zapatillas para runners elegidas aleatoriamente:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad pese más de 300 g?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad pese más de 300 g?

Sea la variable aleatoria x = «número de zapatillas que pesan más de 300 g» que sigue una distribución binomial de parámetros n = 200 y p = 0,6, es decir, $x \sim B(200,\ 0,6)$.

Como n = 200 es grande, necesitamos aproximar a la distribución normal para calcular probabilidades. Además, $n=200\geq 5$, $np=200\cdot 0,6=120\geq 5$ y $nq=200\cdot 0,4=80\geq 5$, luego la aproximación es buena.

$$\mu=np=120 \quad \text{y} \quad \sigma=\sqrt{npq}=6,93$$
$$W\sim N(120,\ 6,93)$$
$$z=\frac{w-120}{6,93}\sim N(0,1)$$

a) $$p(x>100)=p(w\geq 100,5)=p\left(\frac{w-120}{6,93}\geq\frac{100,5-120}{6,93}\right)=p(z\geq,-2,81)=$$
$$=p(z\leq 2,81)=0,9975 \text{ o } 99,75\ \%$$

La probabilidad de que más de la mitad de las zapatillas de la muestra pese más de 300 g es del 99,75 %.

b) $$p(x=100)=p(99,5<w<100,5)=$$
$$=p\left(\frac{99,5-120}{6,93}<\frac{w-120}{6,93}<\frac{100,5-120}{6,93}\right)=$$
$$=p(-2,36<z<-2,81)=p(z<2,81)-p(z<2,36)=$$
$$=0,9985-0,9975=0,001 \text{ o } 0,1\ \%$$

La probabilidad de que exactamente la mitad de las zapatillas pese más de 300 g es del 0,1 %.

20. Un bombo contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se realiza una extracción se devuelve la bola al bombo.

a) Si se realizan 6 extracciones, calcula la probabilidad de que el 5 salga al menos 2 veces.

b) Si se hacen 100 extracciones, halla la probabilidad de que el 5 salga al menos 10 veces.

a) Sea la variable aleatoria x = «número de veces que sale el 5» que saque una distribución binomial de parámetros n = 6 y $p=\frac{1}{10}=0{,}1$, es decir, $x\sim B(6,\ 0{,}1)$.

La función de probabilidad es:

$$p(x)=\binom{6}{x}\cdot(0{,}1)^x\cdot(0{,}9)^{6-x},\ x=0,1,\ldots,6$$

Por tanto, la probabilidad de que en 6 extracciones salga el 5 al menos dos veces es:

$$p(x\geq 2)=1-p(x\leq 2)=1-\left[p(x=0)+p(x=1)\right]=1-\left[(0{,}9)^6+\binom{6}{1}\cdot(0{,}1)^1\right]\cdot(0{,}9)^5=$$

$$=0{,}1143 \text{ o } 11{,}43\ \%$$

b) En este caso la variable aleatoria x sigue una distribución binomial de parámetros n = 100 y p = 0,1, es decir, $x\sim B(100,\ 0{,}1)$.

Como $n=100\geq 30$, $np=100\cdot 0{,}1=102{,}5$ y $nq=100\cdot 0{,}9=90\geq 6$ podemos aproximar razonablemente para una variable normal de media $\mu=np=10$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=3$, es decir, $w\sim N(10,3)$.

La variable tipificada es: $z=\frac{w-10}{3}\sim N(0,1)$.

La probabilidad de que en 100 extracciones salga el 5 al menos 10 veces es:

$$p(x\geq 10)=p(w>9{,}5)=p\left(\frac{w-10}{3}>\frac{9{,}5-10}{3}\right)=p(z>-0{,}17)=p(z<0{,}17)=$$

$$=0{,}5675 \text{ o } 56{,}75\ \%$$

21. Cinturón de seguridad. Según datos de la policía municipal de una localidad, en el 15 % de los accidentes producidos el conductor no lleva puesto el cinturón de seguridad. En una muestra de 100 accidentes, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve puesto el cinturón de seguridad el conductor...

a) ... entre 20 y 30 (ambos incluidos) accidentes?

b) ... en menos de 20 accidentes?

c) ... en más de 15 accidentes?

Sea la variable aleatoria x = «n.º de accidentes en los que el conductor no llevaba puesto el cinturón de seguridad». Entonces,

$x \sim B(100;\ 0,15)$

Como $n = 100 \geq 300$, $np = 100 \cdot 0,15 = 15 \geq 5$ y $nq = 100 \cdot 0,85 = 85 \geq 5$, la aproximación para la normal es buena. Así:

$$\left.\begin{array}{l} \mu = np = 100 \cdot 0,15 = 15 \\ \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,15 \cdot 0,85} = 3,57 \end{array}\right\} w \sim N(15; 3,57) \text{ y } z = \frac{w-15}{3,57} \sim N(0,1)$$

a) $p(20 \leq x \leq 30) = p(19,5 < w < 30,5) = p\left(\frac{19,5-15}{3,57} < \frac{w-15}{3,57} < \frac{30,5-15}{3,57}\right) =$

$= p81,26 < z < 4,34) = p(z < 4,34) - p(z < 1,26) = 1 - 0,8962 = 0,1038$

Hay una probabilidad del 10,38 % de que haya entre 20 y 30 conductores que no llevaran puesto el cinturón

b) $P(x < 20) = P(w \leq 19,5) = P\left(\frac{-15}{3,57} \leq \frac{19,5-15}{3,57}\right) = P(z \leq 1,26) = 0,8962$

La probabilidad de que haya menos de 20 accidentes en los que el conductor no llevara puesto el cinturón de seguridad es del 89,62 %.

c) $P(x > 15) = P(w \geq 15,5) = P\left(\frac{w-15}{3,57} \geq \frac{15,5-15}{3,57}\right) = P(z \geq 0,14) =$

$= 1 - P(z < 0,14) = 1 - 0,5557 = 0,4443$

Hay una probabilidad del 44,43 % de que haya más de 15 accidentes en los que el conductor no llevara puesto el cinturón de seguridad.

22. Se estima que la vida de los perros labradores sigue una distribución normal de media 12 años y desviación típica 2 años.

a) ¿Cuánto tiempo de vida tienen el 10 % de los que más viven?

b) En una población de 500 perros labradores, estima cuántos vivirán menos de 10 años.

La variable aleatoria x = «vida, en años, de los perros labradores» sigue una distribución normal de media μ = 12 y desviación típica σ = 2, es decir, $x \sim N(12, 2)$, luego la variable tipificada es:

$$z = \frac{x-12}{2} \sim N(0,1)$$

a) Para hallar el tiempo de vida del 10 % de los perros labradores que más viven, tenemos que encontrar el valor k tal que $p(x > k) = 0,10$, o lo que es equivalente, $p(x \leq k) = 0,90$.

Luego,

$$p\left(\frac{x-12}{2} \leq \frac{k-12}{2}\right) = 0,90 \Rightarrow \frac{k-12}{2} = 1,28 \Rightarrow k \simeq 15$$

El 10 % de los perros labradores que más viven lo hacen 15 años o más.

b) $$p(x<10) = p\left(\frac{x-12}{2} < \frac{10-12}{2}\right) = p(z<1) = p(z>1) = 1-p(z\leq 1) =$$
$$= 1 - 0,8413 = 0,1587 \text{ o } 15,87\ \%.$$

$$0,1587 \cdot 500 \simeq 79$$

Por tanto, en una población de 500 perros labradores, se estima que 79 de ellos vivirán menos de 10 años.

Actividades finales

Variable aleatoria

23. En cada uno de los siguientes casos, indica si la variable aleatoria dada es discreta o continua:

a) Número de jugadores lesionados por temporada en un equipo de rugby.

b) El tiempo de espera en una consulta médica.

c) El grosor de una tubería.

d) El precio de las consumiciones en un restaurante.

e) El número de pacientes que acuden a las urgencias de un hospital a lo largo de un día dado.

a) Discreta.

b) Continua.

c) Continua.

d) Continua.

e) Discreta.

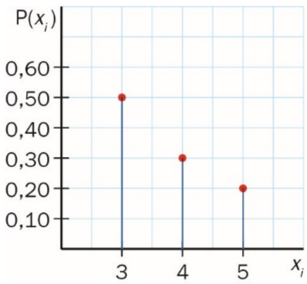
Variables aleatorias discretas

24. **El dueño de un restaurante necesita contratar 3, 4 o 5 empleados, con probabilidades respectivas de 0,5, 0,3 y 0,2. Representa la función de probabilidad y calcula el número esperado de empleados que contratará.**

Podemos construir la siguiente tabla en la que figuran los valores de la variable aleatoria *x* = «número de empleados» y las probabilidades respectivas. Así:

x_i	3	4	5
$p(x_i)$	0,5	0,3	0,2

La gráfica de la función de probabilidad es la siguiente:



El número medio o esperado de empleados que contratará es:

$\mu = E \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}7$ empleados.

25. **Un agente de seguros que trabaja en un centro comercial sabe por experiencia que, en el 20% de las ocasiones que contacta con una persona, esta contrata un seguro. Si contacta con tres personas, calcula la distribución de probabilidad del número de seguros que realiza este agente.**

Sea $x =$ "número de seguros que realiza este agente".

$n = 3, \quad p = 0{,}2, \quad q = 0{,}8$

$x \sim B(3\,;\,0{,}2)$

Y la función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{3}{x} (0{,}2)^{x} \; (0{,}8)^{3-x}, \quad x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$p(0) = (0{,}8)^{3} = 0{,}512$$

$$p(1) = \binom{3}{1} (0{,}2) \; (0{,}8)^{2} = 0{,}384$$

$p(2)=\binom{3}{2}(0,2)^2(0,8)=0,096$

$p(3)=(0,2)^3=0,008$

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria x es la siguiente:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,512	0,384	0,096	0,008

26. La probabilidad de que una persona elegida al azar tenga los ojos azules es del 10 %. Se elige al azar una muestra de cinco personas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos personas tengan los ojos azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, una persona tenga los ojos azules?

c) Calcula la media y la desviación típica del número de personas con ojos azules de esta muestra.

Sea la variable aleatoria $x=$ "número de personas con ojos azules".

$n=5$, $p=0,1$, $q=0,9$

$x\sim B(5;\,0,1)$

La función de probabilidad de x es:

$$p(x)=\binom{5}{x}(0,1)^x(0,9)^{5-x},\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 5$$

a) $p(x=2)=\binom{5}{2}(0,1)^2\cdot(0,9)^3=0,0720$ *o* $7,20\%$

La probabilidad de que exactamente dos personas tengan los ojos azules es del $7,20\%$.

b) $p(x\geq 1)=1-p(0)=1-\binom{5}{0}(0,1)^0(0,9)^5=0,4095$ *o* $40,95\%$

La probabilidad de que, al menos, una persona tenga los ojos azules es del $40,95\%$.

c) $\mu=np=5\cdot 0,1=0,5$

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{5\cdot 0,1\cdot 0,9}=0,671$

27. **En una escuela de ingeniería se sabe que solo el 35 % de los estudiantes que inician sus estudios logran obtener el título de máster. Se selecciona al azar a seis estudiantes que inician sus estudios.**

a) **Calcula la probabilidad de que todos obtengan el título de máster.**

b) **¿Cuál es la probabilidad de que, al menos, dos obtengan el título de máster?**

Sea $x=$ *"número de estudiantes que logran el título de máster".*

$n=6 \;,\quad p=0,35 \;,\quad q=0,65$

$x \sim B(6;\, 0,35)$

La función de probabilidad es:

$$p(x)=\binom{6}{x}(0,35)^{x}\,(0,65)^{6-x}\,,\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$$

$$p(x=6)=\binom{6}{6}(0,35)^{6}\,(0,65)^{0}\simeq 0,0018$$

Hay un $0,18\,\%$ de probabilidad de que todos logren el título de máster.

$$p(x\geq 2)=1-p(x<2)=1-[p(0)+p(1)]=1-\left[(0,65)^{6}+\binom{6}{1}(0,35)\,(0,65)^{5}\right]\simeq 0,6809$$

La probabilidad de que, al menos, dos de los seis estudiantes logren el título de máster es del $68,09\,\%$

28. **Se lanza un dado cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos o más cincos?**

Sea $x=$ *"número de cincos al lanzar el dado".*

$n=4 \;,\quad p=\dfrac{1}{6} \;,\quad q=\dfrac{5}{6}$

$x \sim B\left(4\,,\,\dfrac{1}{6}\right)$

La función de probabilidad es:

$$p(x)=\binom{4}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}\,,\quad x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

Entonces:

$$p(x \geq 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$= 0,132$ o $13,2\%$

La probabilidad de obtener dos o más cincos al lanzar el dado cuatro veces es del $13,2\%$

29. **En una sucursal bancaria saben que, mensualmente, el 5 % de los recibos devueltos de sus clientes se deben a falta de fondos en sus cuentas. Se selecciona una muestra de 10 recibos de esa sucursal que han sido devueltos. Determina la probabilidad de que al menos 2 de ellos sean devueltos por falta de fondos.**

Consideremos la variable aleatoria x = «número de recibos devueltos por falta de fondos en sus cuentas» que sigue una distribución binominal de parámetros n = 10 y p = 0,05, es decir, $x \sim B(10,\ 0{,}05)$.

Su función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{10}{x}(0,05)^x \cdot (0,95)^{10-x},\ x = 0,1,\ldots,10$$

Entonces,

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - \left[p(x=0) + p(x=1)\right] = 1 - \left[(0,95)^{10} + \binom{10}{1}\cdot(0,05)\cdot(0,95)^9\right] = 0,0861$$

La probabilidad de que al menos dos recibos de los diez devueltos sean por falta de fondos es del 8,61 %.

30. **Un canal de televisión emite todos los jueves un documental sobre españoles por el mundo. Una persona ve ese documental con una probabilidad de 0,7. Calcula la probabilidad de que vea al menos cuatro de los próximos seis episodios de este documental.**

Sea la variable aleatoria x = «número de episodios que ve la persona de ese documental» que sigue una distribución binominal de parámetros n = 6 y p = 0,7, es decir, $x \sim B(6,\ 0{,}7)$.

La función de probabilidad de esta variable aleatoria es:

$$p(x) = \binom{6}{x}(0,7)^x(0,3)^{6-x},\ x = 0,1,2,\ldots,6$$

Por tanto, la probabilidad de que esta persona vea al menos cuatro de los próximos seis episodios de este documental, es:

$$p(x \geq 4) = \binom{6}{4} \cdot (0,7)^4 \cdot (0,3)^2 + \binom{6}{5}(0,7)^5 \cdot (0,3)^1 + (0,7)^6 = 0,7443 \text{ o } 74,43\ \%$$

31. Según un estudio del mes pasado, la cadena Evaumedia lidera los índices de audiencia televisiva con un 13,2 % en la franja horaria nocturna de 21 a 24 horas. Se elige a 16 personas al azar que estén viendo la televisión en esa franja horaria.

a) Calcula la probabilidad de que 3 o más personas estén viendo esa cadena.

b) Determina la probabilidad de que exactamente la mitad estén conectados a esa cadena.

Sea la variable aleatoria x = «número de personas que están viendo esa cadena en la franja horaria indicada» que sigue una distribución binomial de parámetros $n = 16$ y $p = 0{,}132$, es decir, $x \sim B\,(16, 0{,}132)$. Y cuya función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{16}{x} \cdot (0,132)^x \cdot (0,862)^{16-x},\ x = 0, 1, \ldots, 16$$

a) $p(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - \left[p(0) + p(1) + p(2)\right] =$

$$= 1 - \left[(0,862)^{16} + 16 \cdot (0,132) \cdot (0,862)^{15} + 120 \cdot (0,132)^2 \cdot (0,862)^{14}\right] =$$
$$= 0,4179 \text{ o } 41,79\ \%$$

Hay una probabilidad del 41,79 % de que tres o más personas estén viendo la cadena Evaumedia.

b) $p(x = 8)\binom{16}{8} \cdot (0,132)^8 \cdot (0,862)^8 = 0,0004$

La probabilidad de que haya exactamente 8 personas viendo la cadena Evaumedia es del 0,04 %.

Variables aleatorias continuas

32. Una variable aleatoria x sigue una distribución normal de media 50 y desviación típica 8. ¿Qué valor de x es tal que solo el 8 % de los valores son menores que él?

Se trata de encontrar un valor k tal que

$$p(x < k) = 0,08$$

Donde $x \sim N(50, 8)$, o bien, $Z = \dfrac{x - 50}{8} \sim N(0, 1)$

Entonces:

$$p(x<k)=p\left(\frac{x-50}{8}<\frac{k-50}{8}\right)=p\left(Z<\frac{k-50}{8}\right)=0,8 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k-50}{8}=-1,405 \;\Rightarrow\; k=-1,405\cdot 8+50=38,76$$

33. Una variable aleatoria x sigue una distribución normal de media 4 y desviación típica 2. Calcula el valor de k tal que $P(4-k\le x\le 4+k)=0,5934$.

$x\sim N(4\,,\,2)$, o bien, $Z=\dfrac{x-4}{2}\sim N(0,1)$

$$p(4-k\le x\le 4+k)=p\left(\frac{4-k-4}{2}\le\frac{x-4}{2}\le\frac{4+k-4}{2}\right)=p\left(\frac{-k}{2}\le Z\le\frac{k}{2}\right)=$$

$$=p\left(Z\le\frac{k}{2}\right)-p\left(Z\le\frac{-k}{2}\right)=p\left(Z\le\frac{k}{2}\right)-p\left(Z\ge\frac{k}{2}\right)=$$

$$=p\left(Z\le\frac{k}{2}\right)-\left(1-p\left(Z\le\frac{k}{2}\right)\right)=2p\left(Z\le\frac{k}{2}\right)-1$$

Como $2p\left(Z\le\dfrac{k}{2}\right)-1=0,5934$, entonces $p\left(Z\le\dfrac{k}{2}\right)=\dfrac{0,5934+1}{2}=0,7967$

Luego, $\dfrac{k}{2}=0,83 \;\Rightarrow\; k=1,66$

34. El tiempo, en segundos, que tarda una máquina en embalar paquetes es una variable aleatoria *x* que tiene por función de densidad: $f(x)=0,05,\ 20\le x\le 40$.

***a)* Encuentra la proporción de paquetes que tardan en embalarse más de 30 segundos.**

***b)* ¿Cuántos segundos tardará en embalar los paquetes del 10 % de los que más tiempo llevan?**

a) La probabilidad de que un paquete tarde en embalarse más de 30 segundos es:

$$p(x>30)=\int_{30}^{40}0,05\,dx=0,05\big[x\big]_{30}^{40}=0,05(40-30)=0,5$$

El 50 % de los paquetes tardan en embalarse más de 30 segundos.

b) Tenemos que encontrar el valor de k tal que $p(x>k)=0,10$, o lo que es equivalente, $p(x\le k)=0,90$. Así:

$$p(x\le k)=0,90\Rightarrow\int_{30}^{k}0,05\,dx=0,90\Rightarrow 0,05(k-20)=0,90\Rightarrow k-20=18\Rightarrow k=38$$

El 10 % de los paquetes que más tiempo llevan en embalarse lo harán en 38 segundos o más.

35. El tiempo que un estudiante de bachillerato está atento a las explicaciones de una profesora se puede modelar por una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 13 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar preste atención más de 25 minutos.

b) Halla la probabilidad de que un estudiante elegido al azar esté atento entre 15 y 25 minutos.

c) ¿Cuánto tiempo prestan atención el 5 % de los que más lo hacen? ¿Y el 10 % de los que menos?

Sea x = «el tiempo, en minutos, que un estudiante está atento a las explicaciones de una profesora» que sigue una ley normal de media μ = 20 minutos y desviación típica σ = 13 minutos, es decir, $x - N(20, 13)$.

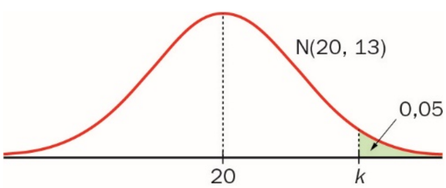
Por tanto, la variable normal tipificada es:

$$z = \frac{x-20}{13} \sim N(0,1)$$

a) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar presta atención más de 25 minutos es:

$$p(x > 25) = p\left(\frac{x-20}{13} > \frac{25-20}{13}\right) = p(z > 0,38)01 - p(z \leq 0,38) = 1 - 0,6480 = 0,352 \text{ o } 35,2\ \%$$

b) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar esté atento entre 15 y 25 minutos es:



$$p(15 < x < 25) = p(-0,38 < z < 0,38) = p)z < 0,38) - p(z < -0,38) = 2p(z < 0,38) - 1 =$$
$$= 0,2960 \text{ o } 29,6\ \%$$

c) Tenemos que encontrar, el primer lugar, el valor k tal que $p(x \geq k) = 0,05$, o lo que es equivalente, $p(x < k) = 0,95$.

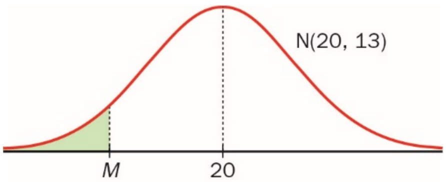
Luego,

$$p(x < k) = 0,95 \Rightarrow p\left(\frac{x-20}{13} < \frac{k-20}{13}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{k-20}{13} = 1,645 \Rightarrow k = 41,39$$

El 5 % de los que más tiempo prestan atención lo hacen al menos 41,39 minutos.

Por su parte, para hallar el 10 % de los que menos prestan atención tenemos que encontrar el valor M tal que:

$$p(x < M) = 0{,}10$$



Luego,

$$p(x < M) = 0{,}10 \Rightarrow p\left(\frac{x-20}{13} < \frac{M-20}{13}\right) =$$

$$= 0{,}10 \Rightarrow \frac{M-20}{13} = -1{,}28 \Rightarrow M = 3{,}36$$

El 10 % de los estudiantes que menos prestan atención lo hacen como mucho 3,36 minutos.

Aplicaciones

36. Atención al cliente. Una organización de consumidores afirma que, al llamar al teléfono de atención al cliente de una compañía, en el 80 % de las ocasiones salta el mensaje: «todos nuestros agentes están ocupados, inténtelo de nuevo pasados cinco minutos». En una muestra de 30 clientes elegidos al azar que han intentado contactar con dicha compañía, ¿a cuántos clientes se espera que les salte ese mensaje? Calcula, también, la desviación típica.

Sea la variable aleatoria x = «número de clientes a los que le salta ese mensaje» que sigue una distribución binominal de parámetros n = 30 y p = 0,8, es decir, $x \sim B(30, 0{,}8)$.

La media o esperanza matemática de esta distribución binomial es:

$$\mu = [x] = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}8 = 24$$ clientes.

Luego, por término medio les saltará ese mensaje a 24 clientes de los 30.

Por otro lado, la variabilidad dada para la desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 2{,}19$$ clientes.

37. Visita médica. El 70 % de los pacientes que acuden a un médico con una determinada dolencia se recuperan en menos de un mes. Este médico trata a 8 pacientes con esa dolencia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 se recuperen?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se recuperen todos?

Sea la variable aleatoria x = «número de pacientes que acuden a ese médico con una determinada dolencia» que se distribuye según una ley binomial de parámetros n = 8 y p = 0,7, es decir, $x \sim B(8, 0{,}7)$.

Su función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{8}{x}(0,7)^x (0,3)^{8-x}, x = 0,1,\ldots,8$$

a) $$p(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - \left[p(0) + p(1) + p(2)\right] =$$

$$= 1 - \left[(0,3)^8 + \binom{8}{1} \cdot (0,7) \cdot (0,3)^7 + \binom{8}{2} \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^6\right] =$$
$$= 0,9887 \text{ o } 98,87\ \%$$

Hay una probabilidad de 98,87 % de que al menos tres pacientes se recuperen.

b) $$p(x = 8) = \binom{8}{8}(0,7)^8 (0,3)^0 = (0,7)^8 = 0,0576 \text{ o } 5,76\ \%$$

La probabilidad de que se recuperen todos es del 5,76 %.

38. Construcción Lego. Los operadores de empaquetado de cajas de construcciones de LEGO seleccionan cada día una muestra de 20 cajas para comprobar si las piezas son las adecuadas para llevar a cabo la construcción correspondiente. Por experiencia saben que el 2 % de las cajas presentan algún tipo de fallo. Se considera la variable aleatoria x = «número de cajas que presentan algún fallo» en la muestra de 20 cajas. Sabiendo que se detiene el proceso de producción para ajustar alguna de las máquinas si el número de cajas que presenta fallos excede a su media en más de dos desviaciones típicas, ¿qué porcentaje de días será necesario detener el proceso de producción?

Con los datos del enunciado tenemos que x sigue una distribución binominal de parámetros

n = 20 y p = 0,02, es decir, $x \sim B(20, 0{,}02)$. Cuya función de probabilidad es:

$$p(x) = \binom{20}{x} \cdot (0,02)^x \cdot (0,98)^{20-x}, x = 0,1,\ldots,20$$

En las distribuciones binomiales la media y la desviación típica son:

$\mu = np = 20 \cdot 0,02 = 0,4$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = 0,626$

El número de cajas, x, excede a su media, μ, en más de dos desviaciones típicas, 2σ, es:

$x - \mu > 2\sigma \Rightarrow x - 0,4 > 1,252 \Rightarrow x > 1,652$

Luego,

$p(x > 1,652) = p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - p\left[(0,98)^{20} + 20 \cdot (0,02) \cdot (0,98)^{19}\right] = 0,0599$

Por tanto, aproximadamente el 6 % de los días será necesario detener el proceso de producción.

39. Gasto de electricidad. Se estima que el gasto medio anual en electricidad de los hogares españoles es de 500 €. Por su parte, se sabe que el 40 % de los hogares superan esa cantidad. En una muestra de 20 hogares:

a) **Por término medio, ¿cuántos hogares superarán ese gasto anual?**

b) **Determina la probabilidad de que haya como mucho 3 hogares que superen el gasto anual de 500 €.**

Consideremos la variable aleatoria x = «número de hogares de la muestra que superan los 500 € de gasto en electricidad» que sigue una distribución binomial de parámetros n = 20 y

p = 0,4, es decir, $x \sim B$ (20, 0,4).

La función de probabilidad es:

$p(x) = \binom{20}{x}(0,4)^x(0,6)^{20-x}, x = 0,1,\ldots,20$

a) La media o esperanza matemática de la distribución binominal es:

$\mu = np = 20 \cdot 0,4 = 8$

Por tanto, se espera que por término medio 8 de los 20 hogares superen el gasto anual de 500 € en electricidad.

b) $p(x \leq 3) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) =>$

$\Rightarrow (0,6)^{20} + \binom{20}{1}(0,4)^2(0,6)^{18} + \binom{20}{3}(0,4)^3(0,6)^{17} = 0,0160$ o $1,60\ \%$ es la probabilidad de que como mucho tres hogares superen anualmente los 500 €.

40. Máquina de café. La cantidad de café dispensada por una máquina de café sigue una distribución normal de media 20 cl y varianza 0,25 cl².

a) **Determina la probabilidad de que la máquina dispense un café entre 19 y 21 cl.**

b) **Encuentra la capacidad mínima del vaso para que solo se derrame el café en el 5 % de las ocasiones.**

Sea la variable aleatoria x = «cantidad, en cl, de café dispensada por esta máquina» que sigue una distribución normal de media μ = 20 cl y variable $\sigma^2 = 0{,}25\ \text{cl}^2$, es decir, $x \sim N(20,\ 0{,}5)$.

Luego, la variable tipificada es:

$$z = \frac{x-20}{0{,}5} \sim N(0{,}1)$$

a) $$p(19 < x < 21) = p\left(\frac{19-20}{0{,}5} < \frac{x-20}{0{,}5} < \frac{21-20}{0{,}5}\right) =$$

$$= p(-2 < z < 2) = p(z < 2) - p(z < -2) = p(z < 2) - p(z > 2) =$$
$$= p(z < 2) - (1 - p(z \leq -2) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}9544 \text{ o } 95{,}44\ \%$$

La máquina dispensará café entre 19 y 21 cl en el 95,44 % de las ocasiones.

b) La capacidad mínima del vaso será el valor de k tal que $p(x \geq k) = 0{,}05$.

O lo que es equivalente, $p(x < k) = 0{,}95$

Luego,

$$p(x < k) = 0{,}95 \Rightarrow p\left(\frac{x-20}{0{,}5} < \frac{k-20}{0{,}5}\right) = 0{,}95$$

Buscando en la parte central de la tabla el valor 0,95 observamos que está en la mitad entre 0,9495 y 0,9505. Por tanto, asignamos la media, es decir, 1,645. Por tanto,

$$\frac{k-20}{0{,}5} = 1{,}645 \Rightarrow k = 20 + 0{,}5 \cdot 1{,}645 \simeq 20{,}82$$

La capacidad mínima del vaso para que solo se derrame café en el 5 % de las ocasiones debe de ser de 20,82 cl.

41. Parada de autobús. Se estima que el tiempo de espera en una parada de autobús sigue una distribución normal de media 10 minutos y desviación típica 3 minutos.

a) Halla la probabilidad de que una persona tenga que esperar en esa parada menos de 5 minutos.

b) ¿Cuál es el tiempo de espera para el 25 % de los que menos esperan? ¿Y para el 10 % de los que más esperan?

Consideremos la variable aleatoria x = «tiempo, en minutos, de espera en una parada de autobús» que sigue una distribución normal de media μ = 10 minutos y una desviación típica σ = 3 minutos, es decir, $x \sim N(10, 3)$.

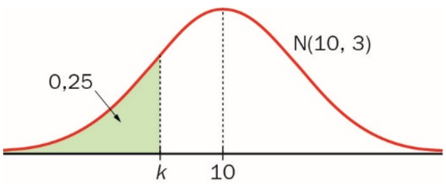
Luego, la variable tipificada es: $z = \dfrac{x-10}{3} \sim N(0,1)$.

a) $$p(x<5) = p\left(\frac{x-10}{3} < \frac{5-10}{3}\right) = p(z < -1,67) = 1 - p(z \leq 1,67) =$$

$$= 1 - 0,9525 = 0,0475 \text{ o } 4,75\ \%$$

La probabilidad de que una persona tenga que esperar en esa parada menos de 5 minutos es del 4,75 %.

b) Para encontrar el tiempo de espera k del 25 % de los que menos esperan debemos resolver:



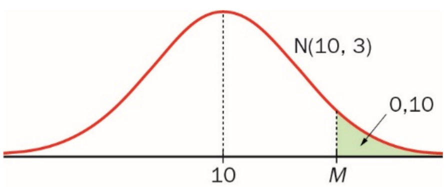
$$p(x \leq k) = 0,25$$

Esto es,

$$p\left(\frac{x-10}{3} \leq \frac{k-10}{3}\right) = 0,25 \Rightarrow \frac{k-10}{3} = 0,67 \Rightarrow k = 12,01$$

El 25 % de las personas que nos esperan lo hace como mucho 12,01 minutos.

Por otro lado, para hallar el tiempo de espera M del 10 % de los que más esperan tenemos que resolver:



$$p(x \geq M) = 0,10$$

Es decir,

$$p(x \geq M) = 0,10 \Rightarrow q(x < M) = 0,90 \Rightarrow p\left(\frac{x-10}{3} < \frac{M-10}{3}\right) = 0,90 \Rightarrow \frac{M-10}{3} = 1,28 \Rightarrow M = 13,84$$

El 10 % de las personas que más esperaran están al menos 13,84 minutos.

42. Envasadora. Una máquina está preparada para llenar bolsas de sal, cuyo peso sigue una distribución normal de media 110 g y desviación típica de 1,142 g. Si el peso de la bolsa de sal es inferior a 108 g, la bolsa es rechazada. Con estos ajustes, el 4 % de las bolsas son rechazadas.

a) El ajuste de la máquina se altera y se encuentra que el 7 % de las bolsas son rechazadas. Si el peso medio no ha cambiado, encuentra la nueva desviación típica.

b) La máquina se ajusta para trabajar con la nueva desviación típica. Encuentra el valor que debería tener la media para que solo el 4 % de las bolsas sean rechazadas.

Sea la variable aleatoria x = «el peso de las bolsas de sal llenadas por esta máquina» que sigue una distribución normal de media μ = 110 g y desviación típica σ = 1,142 g, es decir,

$x \sim N(110,\ 1{,}142)$.

Luego la variable normal tipificada es:

$$z = \frac{x-110}{1{,}142} \sim N(0,1).$$

a) Ahora $x \sim N(110,\ \sigma)$ y el 7 % de las bolsas son rechazadas. Por tanto,

$$p(x<108)=0{,}07 \Rightarrow p\left(\frac{x-110}{\sigma}<\frac{108}{\sigma}\right)=0{,}07 \Rightarrow p\left(z<\frac{-2}{\sigma}\right)=0{,}07 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{\sigma}=-1{,}48 \Rightarrow \sigma=1{,}351$$

La nueva desviación típica es σ = 1,351 g

b) En este caso $x \sim N(\mu,\ 1{,}351)$ y solo se quiere que el 4 % de las bolsas sea rechazada. Así:

$$p(x<108)=0{,}04 \Rightarrow p\left(\frac{x-\mu}{1{,}351}<\frac{108-\mu}{1{,}351}\right)=0{,}04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\left(z<\frac{108-\mu}{1{,}351}\right)=0{,}04 \Rightarrow \frac{108-\mu}{1{,}351}=-1{,}75 \Rightarrow \mu=110{,}364$$

La nueva media tiene que ser μ = 110,364 g.

43. Producción de los naranjos. Los naranjos en la edad adulta de una zona mediterránea producen naranjas según una distribución normal de media 50 kg y desviación típica 12,5 kg.

a) Elegido un árbol al azar de esta zona, ¿cuál es la probabilidad de que produzca entre 46 y 52 kg? ¿Y más de 55 kg?

b) Si el árbol escogido se encuentra dentro de los que da el 20 % de mayor producción, ¿cuántos kg producirá?

c) En una muestra de 10 árboles de esta zona mediterránea, ¿qué probabilidad hay de que al menos 2 produzcan más de 55 kg?

Sea la variable aleatoria x = «kg de naranjas producidas» que sigue una distribución normal de media μ = 50 kg y desviación típica σ = 12,5 kg, es decir, $x \sim N(50, 12{,}5)$.

Siendo la variable normal tipificada:

$$z = \frac{x-50}{12{,}5} \sim N(0,1)$$

a) La probabilidad de que se produzcan entre 46 y 52 kg de naranjas es:

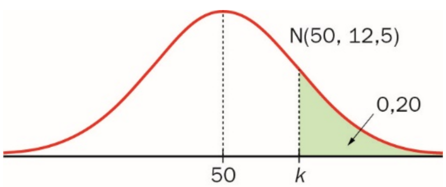
$$p(46 < x < 52) = p\left(\frac{46-50}{12{,}5} < \frac{x-50}{12{,}5} < \frac{52-50}{12{,}5}\right) = p(-0{,}32 < z < 0{,}16) =$$
$$= p(z < 0{,}16) - p(z < -0{,}32) = p(z < 0{,}16) - (1 - p(z \le 0{,}38)) =$$
$$= 0{,}6406 - (1 - 0{,}6255) = 0{,}2661 \text{ o } 26{,}61\ \%$$

Mientras que la probabilidad de que se produzcan más de 55 kg de naranjas es:

$$p(x > 55) = p\left(\frac{x-50}{12{,}5} > \frac{55-50}{12{,}5}\right) = p(z > 0{,}4) = 1 - p(z \le 0{,}4) =$$
$$= 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446 \text{ o } 34{,}46\ \%$$

b) Para hallar los kg que producirá un árbol que se encuentra dentro de los que da el 20% de mayor producción. Tenemos que calcular el valor k tal que:

$$p(x \ge k) = 0{,}20$$



Luego,

$$p(x < k) = 0{,}80 \Rightarrow p\left(\frac{x-50}{12{,}5} > \frac{k-50}{12{,}5}\right) = 0{,}80 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{k-50}{12{,}5} = 0{,}84 \Rightarrow k = 60{,}5$$

El 20 % de los árboles que producen más kg de naranjas obtendrán al menos 60,5 kg.

44. Elecciones municipales. En las últimas elecciones municipales de una ciudad, el partido A obtuvo el 35,2 % de los votos. Si seleccionamos aleatoriamente una muestra de 800 votantes:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya entre 300 y 500 votantes del partido A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que más del 25 % de la muestra sean votantes del partido A?

Sea la variable aleatoria x = «número de votantes del partido A» que sigue una distribución binomial de parámetros n = 800 y p = 0,352.

Como $n = 800 \geq 30$, $np = 800 \cdot 0,352 = 281,6 \geq 5$ y $nq = 800 \cdot 0,648 = 518,4 \geq 5$ podemos aproximar por una distribución normal de media:

$\mu = np = 281,6$

Y desviación típica:

$\sigma = \sqrt{npq} = 13,51$.

Es decir, $w \sim N(281,6,\ 13,51)$ y $z = \dfrac{w - 281,6}{13,51} \sim N(0,1)$

a) $p(300 \leq x \leq 500) = p(299,5 < w < 500,5) =$

$$= p\left(\frac{299,5 - 281,6}{13,51} < \frac{w - 281,6}{13,51} < \frac{500,5 - 281,6}{13,51}\right) =$$
$$= p(1,32 < z < 16,21) = p(z < 16,21) - p(z < 1,32) = 1 - 0,9066 = 0,0934 \text{ o } 9,34\ \%$$

Hay una probabilidad del 9,34 % de que en la muestra haya entre 300 y 500 votantes del partido A.

b) $p(x > 200) = p(w \geq 200,5) = p\left(\dfrac{w - 281,6}{13,51} \geq \dfrac{200,5 - 281,6}{13,51}\right) =$

$= p(z \geq -6) = p(z \leq 6) = 1$ o 100 %

La probabilidad de que más del 25 % de la muestra sean votantes del partido A es del 100 %.

45. Detección de misiles. Se ha diseñado un sistema de radares para la detección de misiles enemigos. En particular, la probabilidad de que el sistema detecte el misil enemigo y emita una advertencia es del 90 %.

a) Si se instalan dos sistemas de radares que funcionan de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los sistemas detecte el misil?

b) Si se instalan tres sistemas de radares que funcionan de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los sistemas detecte el misil?

$p=0,9$, $q=0,01$

Sea $x=$ "número de radares que detectan el misil enemigo".

$n=2$, $x \sim B(2\,;0,9)$

$p(x)=\binom{2}{x}(0,9)^{x}\ (0,1)^{2-x}$, $x=0, 1, 2$

$p(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-p(x=0)=1-(0,1)^{2}=0,99$ o 99%.

La probabilidad de que, al menos, uno de los sistemas de radares detecte el misil es del 99%.

$n=3$, $x \sim B(3\,;0,9)$

$p(x)=\binom{3}{x}(0,9)^{x}\ (0,1)^{3-x}$, $x=0, 1, 2, 3$

$p(x\geq 1)=1-p(x<1)=1-p(0)=1-(0,1)^{3}=0,999$ o $99,9\%$.

La probabilidad de que, al menos, uno de los sistemas de radares detecte el misil es del $99,9\%$.

46. Automóvil eléctrico. **Según informa el fabricante de un modelo de automóvil eléctrico, su autonomía en carretera es de 380 km. Supongamos que la distancia recorrida en carretera es una variable aleatoria normalmente distribuida de media 310 km y una desviación típica de 45 km. Si un conductor de este modelo pretende realizar un viaje a una distancia de 320 km, ¿qué probabilidad tiene de efectuar el recorrido sin tener que recargar la batería?**

Sea $x=$ "distancia, en km, recorrida".

$x \sim N(310\,,\ 45)$, o bien, $Z=\dfrac{x-310}{45}\sim N(0,1)$

$$p(x\geq 320)=p\left(\frac{x-310}{45}\geq\frac{320-310}{45}\right)=p\ (Z\geq 0,22)=1-p(Z<0,22)=$$

$=1-0,5871=0,4129$ o $41,29\%$.

La probabilidad de efectuar este recorrido sin tener que recargar la batería es del $41,29\%$

Por tanto, la información del fabricante está bastante alejada de la realidad.

47. Asistente virtual. **El número de descargas diarias de la aplicación Patrexa, que interactúa con los usuarios utilizando IA y reconocimiento de voz, sigue una distribución normal de media 1580 y una desviación típica de 620.**

a) **Halla la probabilidad de que se produzcan, al menos, 1500 descargas diarias de Patrexa.**

b) **¿Qué probabilidad hay de que se descarguen diariamente Patrexa entre 1400 y 1800 usuarios?**

c) **Se estima que hay una probabilidad de 0,10 de que la cantidad de descargas diarias supere la capacidad de los servidores. ¿Cuántas descargas de Patrexa por día están aseguradas para que no haya problemas con los servidores?**

Sea $x =$ "número de descargas de Patrexa".

$x \sim N(1580, 620)$, o bien, $Z = \dfrac{x - 1580}{620} \sim N(0,1)$

$$p(x \geq 1500) = p\left(\frac{x-1580}{620} \geq \frac{1500-1580}{620}\right) = p(Z \geq -0,13) = p(Z \leq 0,13) =$$

$= 0,5517$ o $55,17\%$

La probabilidad de que se produzcan, al menos, 1500 descargas diarias de Patrexa es del $55,17\%$.

$$p(1400 \leq x \leq 1800) = p\left(\frac{1400-1580}{620} \leq Z \leq \frac{1800-1580}{620}\right) =$$

$$p(-0,29 \leq Z \leq 0,35) = p(Z \leq 0,35) - p(Z \leq -0,29) =$$

$$= p(Z \leq 0,35) - p(Z \geq 0,29) = p(Z \leq 0,35) - (1 - p(Z \leq 0,29)) =$$

$= 0,2509$ o $25,09\%$

La probabilidad de que se descarguen diariamente Patrexa entre 1400 y 1800 usuarios es del $25,09\%$.

Se trata de encontrar un valor k tal que $p(x > k) = 0,10$

$$p(x \leq k) = 0,90 \Rightarrow p\left(\frac{x-1580}{620} \leq \frac{k-1580}{620}\right) = 0,90 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{k-1580}{620}\right) = 0,90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k-1580}{620} = 1,28 \Rightarrow k = 1,28 \cdot 620 + 1580 \simeq 2374$$

Para que no haya problemas con los servidores están aseguradas 2374 descargas.

48. Videojuegos. Según un estudio de las personas que utilizan videojuegos, el 35 % tiene menos de 18 años, el 55 % tiene entre 18 y 45 años, y un 10 % son mayores de 45 años. Se elige una muestra aleatoria de 500 usuarios de videojuegos.

a) ¿Cuántos se espera que sean menores de 18 años?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad tengan entre 18 y 45 años?

c) ¿Qué probabilidad hay de que, al menos, 50 usuarios sean mayores de 45 años?

Sea $x =$ "número de usuarios menores de 18 años".

$n = 500 \;,\quad p = 0,35 \;,\quad q = 0,65$

$x \sim B\ (\ 500\ ;\ 0,35)$

$\mu = np = 500 \cdot 0,35 = 175$

Se espera que 175 de los 500 tengan menos de 18 años.

Sea $y =$ "número de usuarios entre 18 y 45 años".

$n = 500 \;,\quad p = 0,55 \;,\quad q = 0,45$

$y \sim B\ (\ 500\ ;\ 0,55)$

$\mu = np = 500 \cdot 0,55 = 275$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,55 \cdot 0,45} = 11,12$

Mediante aproximación normal tenemos:

$W \sim N\ (\ 275;\ 11,12)$, o bien, $Z = \dfrac{W - 275}{11,12} \sim N(\ 0,1)$

Entonces,

$$p(\ y > 250)\ = p(\ W \geq 250,5)\ = p\left(Z \geq \frac{250,5 - 275}{11,12}\right) = p\ (\ Z \geq -2,20)\ = p\ (\ Z \leq 2,20)\ =$$

$= 0,9861$ o $98,61\%$

La probabilidad de que más de la mitad de los usuarios de videojuegos tengan entre 18 y 45 años es del $98,61\%$.

Sea $t =$ "número de usuarios mayores de 45 años".

$n = 500 \;,\quad p = 0,10 \;,\quad q = 0,90$

$t \sim B\ (\ 500\ ;\ 0,10)$

$\mu = np = 500 \cdot 0,10 = 50$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,10 \cdot 0,90} \simeq 6,71$

Mediante una aproximación tenemos:

$m \sim N\,(50\,;\,6,71)$, o bien, $Z = \dfrac{m - 50}{6,71} \sim N(0,1)$

$$p(t \geq 50) = p(m > 49,5) = p\left(Z \geq \dfrac{49,5 - 50}{6,71}\right) = p\,(Z > -0,07) = p\,(Z < 0,07) =$$

$= 0,5279$ o $52,79\%$

La probabilidad de que haya, al menos, 50 usuarios mayores de 45 años es del $52,79\%$.

EBAU

49. **El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 g y una desviación típica de 15 g. En función del peso, los huevos se clasifican cuatro tamaños.**

a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 g, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?

b) Se elige al azar una muestra de 6 huevos. Calcula la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 g (tamaño M).

Castilla y León

Sea x = «peso, en gramos, de los huevos»

$$x \sim N(67{,}15)$$

$$z = \frac{x-67}{15} \sim N(0{,}1)$$

a) $p(x > 73) = p\left(\frac{x-67}{15} > \frac{73-67}{15}\right) = p(z > 0{,}4) = 1 - p(z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6584 = 0{,}3446 \; o \; 34{,}46\ \%$

La probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL es del 34,46 %.

50. **El Ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de las ofrendas de flores del Día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y una desviación típica de 2 / 5.**

a) ¿Puedes afirmar, con al menos un 95 % de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con una probabilidad mayor del 99 %?

b) Una variable normal estándar z cumple que P (z < 2,3263) = 0,99). ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menos de ocho horas y media fuera del 99 %?

La Rioja

Sea x = «duración, en horas, de la ofrenda floral»

$x \sim N(8, \sqrt{2}/5)$, o bien $z = \frac{x-8}{\sqrt{2}/5} \sim N(0{,}1)$

a) $p(x < 8{,}5) = p\left(\frac{x-8}{\sqrt{2}/5} > \frac{8{,}5-8}{\sqrt{2}/5}\right) = p(z < 1{,}77) = 0{,}9616 > 0{,}95$

Por tanto, sí se sostiene la afirmación de que supera el 95 %.

Como p(x < 8,5) = 0,9616 < 0,99, vemos que la probabilidad, en cambio, no supera el 99 %.

b) Sea $z = \frac{x-8}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$p(x < 8{,}5) = 0{,}99 \to p\left(\frac{x-8}{\sigma} > \frac{8{,}5-8}{\sigma}\right) = 0{,}99 \to p\left(z < \frac{0{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}99$$

$$\to \frac{0{,}5}{\sigma} = 2{,}33 \to \sigma \cong 0{,}21$$

La desviación típica aproximada es de 0,21.

51. **Una variable x es normal de media 25 y una desviación típica de 5, y otra variable y también es normal, pero de media 28 y una desviación típica de 1.**

a) Calcula las probabilidades P (x > 30) y P (y > 30). ¿Cuál es mayor?

b) Tomamos una muestra de n = 4 valores independientes de x y anotamos su promedio x–. Calcula P (x– > 30). ¿Cuál sería el resultado si n = 9?

c) ¿Cómo explicarías la comparación de los resultados de a) y b), sin recurrir a fórmulas?

La Rioja

a) Si $x \sim N(25, 5)$, entonces $z_1 = \frac{x-25}{5} \sim N(0,1)$

Si $y \sim N(28, 1)$, entonces $z_2 = \frac{y-28}{1} \sim N(0,1)$

Entonces:

$$p(x > 30) = p\left(\frac{x-25}{5} > \frac{30-25}{5}\right) = p(z_1 > 1) = 1 - p(z \leq 1)$$

$$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

$$p(y > 30) = p\left(\frac{y-28}{1} > \frac{30-28}{1}\right) = p(z_2 > 2) = 1 - p(z \leq 2)$$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Por tanto, $p(x > 30) > p(y > 30)$

52. **En un examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.**

a) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) Si la desviación típica es 1,5 puntos y el aprobado se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

País Vasco

Sea x = «calificación obtenida en un examen de Lengua inglesa»

Si $x \sim N(6{,}8; \sigma)$, o sea, $z = \frac{x-6{,}8}{\sigma} \sim N(0{,}1)$

a) $p(x > 7{,}6) = 0{,}30 \rightarrow p(x \leq 7{,}6) = 0{,}70 \rightarrow p\left(\frac{x-6{,}8}{\sigma} \leq \frac{7{,}6-6{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}70$

$$\rightarrow p\left(z \leq \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}70 \rightarrow \frac{0{,}8}{\sigma} = 0{,}525 \rightarrow \sigma = 1{,}5238$$

La desviación típica es $\sigma = 1{,}5238$

b) Hay que encontrar el valor de k tal que p(x > k) = 0,20.

$$p\left(\frac{x-6{,}8}{1{,}5} \leq \frac{k-6{,}8}{1{,}5}\right) = p\left(z \leq \frac{k-6{,}8}{1{,}5}\right) = 0{,}80$$

$$\rightarrow \frac{k-6{,}8}{1{,}5} = 0{,}84 \rightarrow k = 1{,}5 \cdot 0{,}84 + 6{,}8 \cong 8{,}1$$

Solo el 20 % del alumnado tiene una nota superior a 8,1 si la desviación típica es $\sigma = 1{,}5$.

c) $p(x \geq 5) = p\left(z \geq \frac{5-6{,}8}{1{,}5}\right) = p(z \geq -1{,}2) = p(z \leq -1{,}2) = 0{,}8849 \; o \; 88{,}49\ \%$

Es decir, aprobó el examen el 88,49 %.

53. Según un estudio de la Dirección General de Tráfico, el número de horas de práctica necesaria para obtener el carné de conducir sigue una distribución normal N (24,9).

a) Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

b) ¿Cuántas hora ha necesitado Andrea para conseguir el carné de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores ha necesitado más horas que ella?

País Vasco

Sea x = «número de horas practicadas para obtener el carnet de conducir»

Si $x \sim N(24, 9)$, o sea, $z = \frac{x-24}{9} \sim N(0{,}1)$

a) $p(x < 20) = p\left(\frac{x-24}{9} < \frac{20-24}{9}\right) = p(z < -0{,}44) = p(z > 0{,}44) = 1 - p(z \leq 0{,}44) = 0{,}33$

La probabilidad de obtener el carnet de conducir tras menos de 20 horas practicadas al volante es del 33 %.

b) Sea k el número de horas que ha necesitado Andrea para sacarse el carnet de conducir.

$$p(x > k) = 0{,}89 \to p(x \leq k) = 0{,}11 \to p\left(\frac{x-24}{9} \leq \frac{k-24}{9}\right) = 0{,}11$$

$\to p\left(z < \frac{k-24}{9}\right) = 0{,}11 \to \frac{k-24}{9} = -1{,}23$, luego k = 13 aproximadamente

Andrea ha necesitado unas 13 clases prácticas para obtener el carnet.

54. Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas.

a) Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?

b) Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas por una muestra de 64 personas sea inferior a 5.

c) En una muestra de 1000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminen, al menos, 5,5 horas a la semana?

Islas Canarias

Sea x = «número de horas que caminan semanalmente»

$x \sim N(5{,}25; 1{,}25)$, o sea, $z = \frac{x-5{,}25}{1{,}25} \sim N(0{,}1)$

a) $p(x > 6) = p\left(\frac{x-5{,}25}{1{,}25} < \frac{6-5{,}25}{1{,}25}\right) = p(z > 0{,}6) = 1 - p(z < 0{,}6)$

$= 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$ o 27,43 %

La probabilidad de que una persona camine más de 6 horas semanalmente es del 27,43 %.

c) $p(x \geq 5{,}5) = p\left(\frac{x-5{,}25}{1{,}25} \geq \frac{5{,}5-5{,}25}{1{,}25}\right) = p(z \geq 0{,}2) = 1 - p(z < 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 =$ $0{,}4207$, que multiplicado por 1000 arroja el valor aproximado de 421.

En otras palabras: se espera que caminen más de 5,5, horas a la semana unas 421 personas de la muestra de 1000 individuos.

55. En una universidad se ha observado que la distribución de calificaciones de Física en los estudios de Ingeniería Informática sigue una ley normal de media μ = 5,1 puntos y una desviación típica de σ = 1,6 puntos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar obtenga una nota inferior a 4 puntos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 64 alumnos tenga una calificación media superior a 5,9?

c) En un aula hay 50 alumnos. ¿Cuántos de ellos se puede esperar que tengan una nota superior a 4 puntos?

Islas Baleares

Sea x = «calificaciones en la asignatura de Física en ingeniería informática»

$x \sim N(5{,}1; 1{,}6)$, o sea, $z = \frac{x-5{,}1}{1{,}6} \sim N(0{,}1)$

a) $p(x < 4) = p\left(\frac{x-5{,}1}{1{,}6} < \frac{4-5{,}1}{1{,}6}\right) = p(z < -0{,}69) = p(z > 0{,}69) = 1 - p(z \leq 0{,}69)$

$= 1 - 0{,}7549 = 0{,}2451$ o 24,51 %

La probabilidad de que un alumno obtenga una nota inferior a 4 es del 24,51 %.

b)) $p(x > 4) = 1 - p(x \leq 4) = 1 - 0{,}2451 = 0{,}7549$

Si multiplicamos ese valor por 50, obtenemos aproximadamente el resultado 38.

Esto significa que 38 de los 50 alumnos obtenga una nota superior al 4 en Física.

56. A lo largo de las diferentes pruebas de acceso a la universidad (PAU) se ha observado que la distribución de las calificaciones de la asignatura de MACS II sigue una ley normal de media 5,3 puntos y una desviación típica de 0,8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5,7?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar suspenda la asignatura MACS II, entendiendo por «suspenso» obtener una calificación menor de 5 puntos?

Islas Baleares

Sea x = «la calificación obtenida en MACS II en la PAU»

$x \sim N(5{,}3; 0{,}8)$, o sea, $z = \frac{x-5{,}3}{0{,}8} \sim N(0{,}1)$

a) $p(x < 5) = p\left(\frac{x-5{,}3}{0{,}8} < \frac{5-5{,}3}{0{,}8}\right) = p(z < -0{,}38) = p(z > 0{,}38) = 1 - p(z \leq 0{,}38)$

$= 1 - 0{,}6480 = 0{,}3520$ o 35,20 %

La probabilidad de que un alumno suspenda la asignatura de MACS II es del 35,20 %.