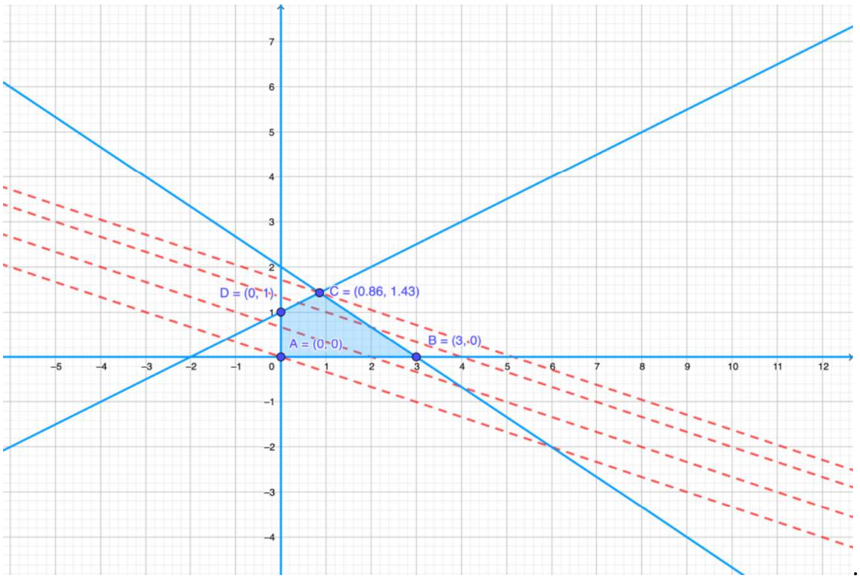
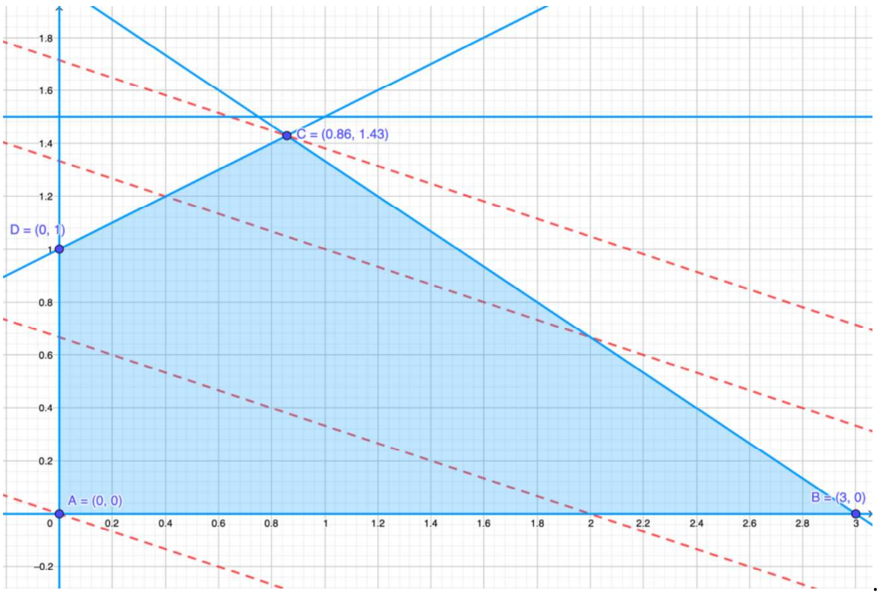
Analiza gráficamente qué ocurre si en la función objetivo el coeficiente 1 pasa a ser 2, es decir, $z = 2x + 3y$. ¿Cuál es la solución en este caso?

a)



El máximo se alcanza en el vértice $C\left(\frac{6}{7}, \frac{10}{7}\right)$ con un valor $z_{máx} = \frac{36}{7}$.

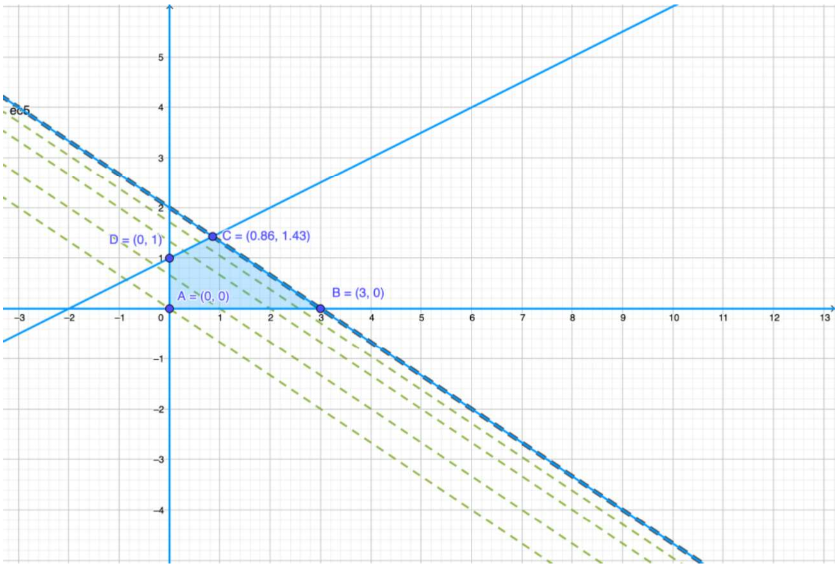
Al introducir esta restricción no cambia la región factible y, por tanto, la solución óptima es la misma.



Al modificar la función objetivo inicial por

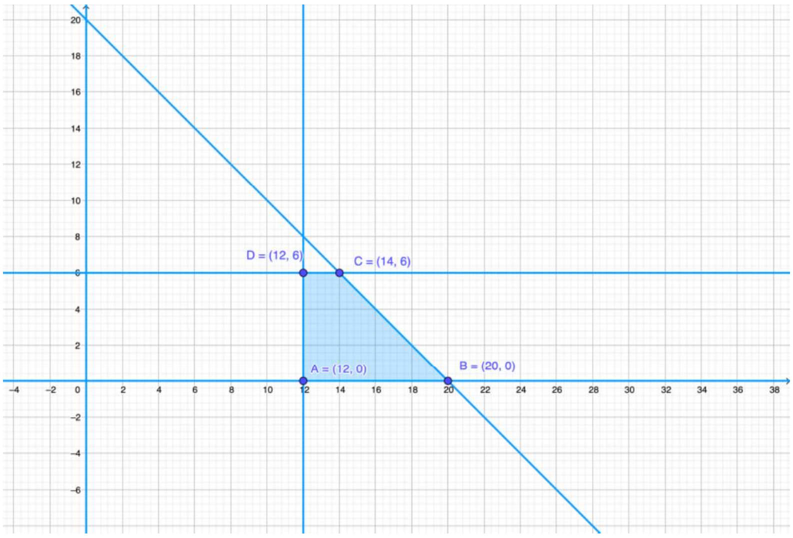
$z = 2x + 3y$

el problema tiene infinitas soluciones a lo largo de la arista BC en un valor $z_{Máx} = 6$.



42. Considera el sistema de inecuaciones lineales: $x + y \leq 20$, $x \geq 12$, $y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. **Dibuja la región factible. Encuentra los valores máximo y mínimo de la función objetivo** $z = 9x + 6y$

a)



La región factible está delimitada por el polígono de vértices $A(12,0)$, $B(20,0)$, $C(14,6)$ y $D(12,6)$.

El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices figura en la siguiente tabla:

Vértices	Valor de $z=9x+6y$
$A(12,0)$	$108 \leftarrow Mínimo$
$B(20,0)$	$180 \leftarrow Máximo$
$C(14,6)$	162
$D(12,6)$	144

$z_{mín}=108$ en el vértice $A(12,0)$

$z_{máx}=180$ en el vértice $B(20,0)$

43. Una joven universitaria da clases particulares de matemáticas a estudiantes de primaria y ESO. Cobra a 15€ la hora de clase de primaria y a 25€ la de la ESO. Para no descuidar sus estudios universitarios, se plantea no dedicar más de 20 horas a la semana a las clases particulares. Además como prefiere a los estudiantes de la ESO, le gustaría dar semanalmente al menos 3 horas en ese nivel, y no más de 8 horas en primaria. Como la demanda es muy alta y puede elegir, ¿cuántas clases

particulares de cada nivel deberá dar semanalmente para maximizar sus ingresos y satisfacer sus preferencias?

Sean:

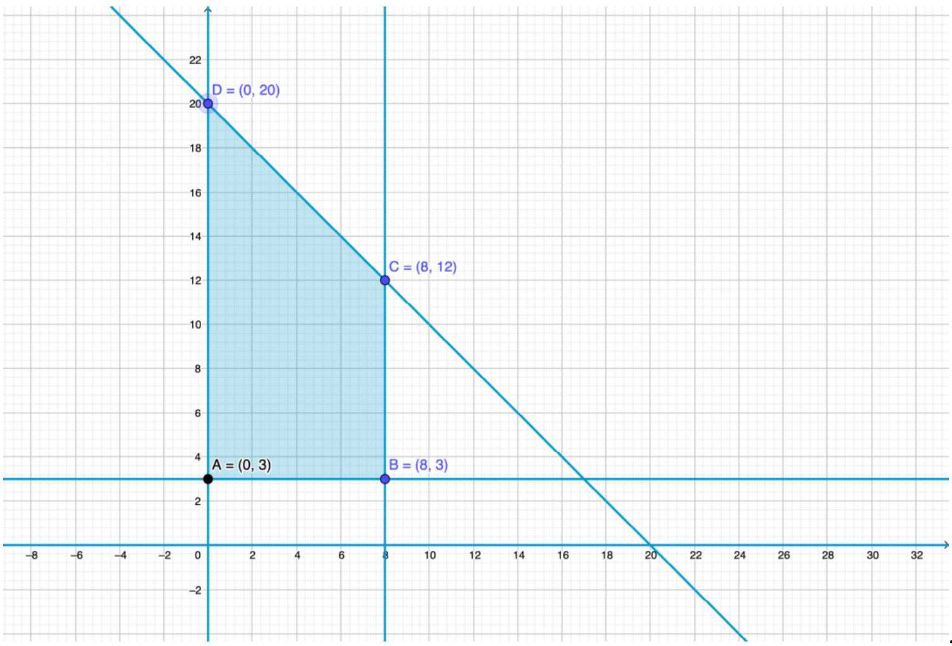
$x =$ "horas de clase de primaria"

$y =$ "horas de clase de ESO"

El enunciado da lugar al siguiente problema de programación lineal:

Maximiza $z = 15x + 25y$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x + y \leq 20 \leftarrow \text{N}^{\text{o}} \text{ máximo de horas semanales} \\ y \geq 3 \leftarrow \text{Preferencias horas de la ESO} \\ x \leq 8 \leftarrow \text{Máximo de horas en primaria} \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible está delimitada por los vértices $A(0,3)$, $B(8,3)$, $C(8,12)$ y $D(0,20)$.

Calculemos, pues, el valor de la función objetivo de cada uno de los vértices.

Vértices	Valor de $z = 15x + 25y$
$A(0,3)$	75
$B(8,3)$	195

$C(8,12)$	420
$D(0,20)$	$500 \leftarrow$ *Máximo*

Por tanto, la joven debería dar 20 horas de clase de la ESO y ninguna de primaria, con el fin de obtener unos ingresos máximos semanales de 500 €.

Aplicaciones

44. Artesano. Un artesano fabrica dos tipos de juguetes: camiones y trenes. Entre los materiales utiliza tornillos, bloques de plástico y ruedas. Para la semana próxima, dispone de 8000, 6000 y 6300 unidades, respectivamente. Para fabricar un tren necesita 10 tornillos, 15 bloques y 18 ruedas, y para fabricar cada camión utiliza 20 tornillos, 10 bloques y 6 ruedas. Vende todo lo que produce, obteniendo un beneficio neto de 80 € por tren y 70 € por camión. Calcula el número de camiones y de trenes que debe fabricar para obtener el máximo beneficio de su venta.

Solución:

Hallamos x e y al número de camiones y trenes que se fabrican, respectivamente. Del enunciado deducimos la información de la siguiente tabla:

	Tornillos	Bloques de plástico	Ruedas
Camiones (x)	10	15	18
Trenes (y)	20	10	6
Disponibilidad	8000	6000	6300

Función objetivo: maximizar z = 70x + 80y

$$\begin{cases} 10x + 20y \leq 8000 \leftarrow \textit{Disponibilidad de tornillos} \\ 15x + 10y \leq 6000 \leftarrow \textit{Disponibilidad de bloques} \\ 18x + 6y \leq 6300 \leftarrow \textit{Disponibilidad de ruedas} \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Simplificando, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 800 \\ 3x + 2y \leq 1200 \\ 3x + y \leq 1050 \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Construimos la siguiente tabla para obtener la región factible:

Ecuación	Puntos de corte	P(0, 0)	Conclusión
r_1: x + 2y = 800	(800, 0) y (0, 400)	$0 \leq 800$	Sí
r_2: 3x + 2y = 1200	(400, 0) y (0, 600)	$0 \leq 1200$	Sí
r_3: 3x + y = 1050	(350, 0) y (0, 1050)	$0 \leq 1050$	Sí

En la siguiente figura vemos que la región factible está delimitada por el polígono de vértices A(0, 0), B(350, 0), C(300, 150), D(200, 300) y E(0, 400).

Para averiguar el máximo beneficio hallamos el valor de z en cada uno de los vértices:

Vértices	Valor de z = 70x + 80y
A(0, 0)	0
B(350, 0)	24 500
C(300, 150)	33 000
D(200, 300)	38 000 ←
E(0, 400)	32 000

El máximo beneficio de 38 000 € se logra cuando se fabrican 200 camiones y 300 trenes.

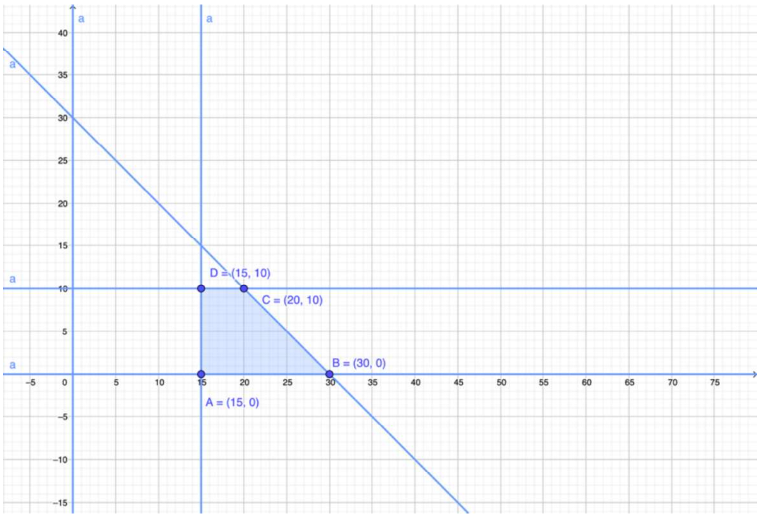
45. Inversión. Carmen puede invertir, como mucho, 30 000 €. Un asesor financiero le recomienda invertir al menos 15 000 € en una empresa de alquileres turísticos, con lo que obtendrá una rentabilidad anual del 3 %, y como mucho 10 000 € en empresas innovadoras con una rentabilidad anual del 5 %. Plantea un sistema de inecuaciones que permita averiguar las distintas posibilidades de inversión que tiene Carmen. A continuación, dibuja la región factible y halla sus vértices.

Designamos por x, y, z las cantidades en miles de euros que invierte Carmen en alquileres turísticos y en empresas innovadoras, respectivamente. Entonces, el sistema de inecuaciones a que da lugar el enunciado es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y\leq 30 & \leftarrow \text{Disponibildad de inversi n} \\ x\geq 15 & \leftarrow \text{Inversi n en empresas tur sticas} \\ y\leq 10 & \leftarrow \text{Inversi n en empresas innovadoras} \\ x\geq 0, y\geq 0 & \end{cases}$$

La región factible queda delimitada por los vértices

$A(15,0), B(30,0), C(20,10)$ y $D(15,10)$.

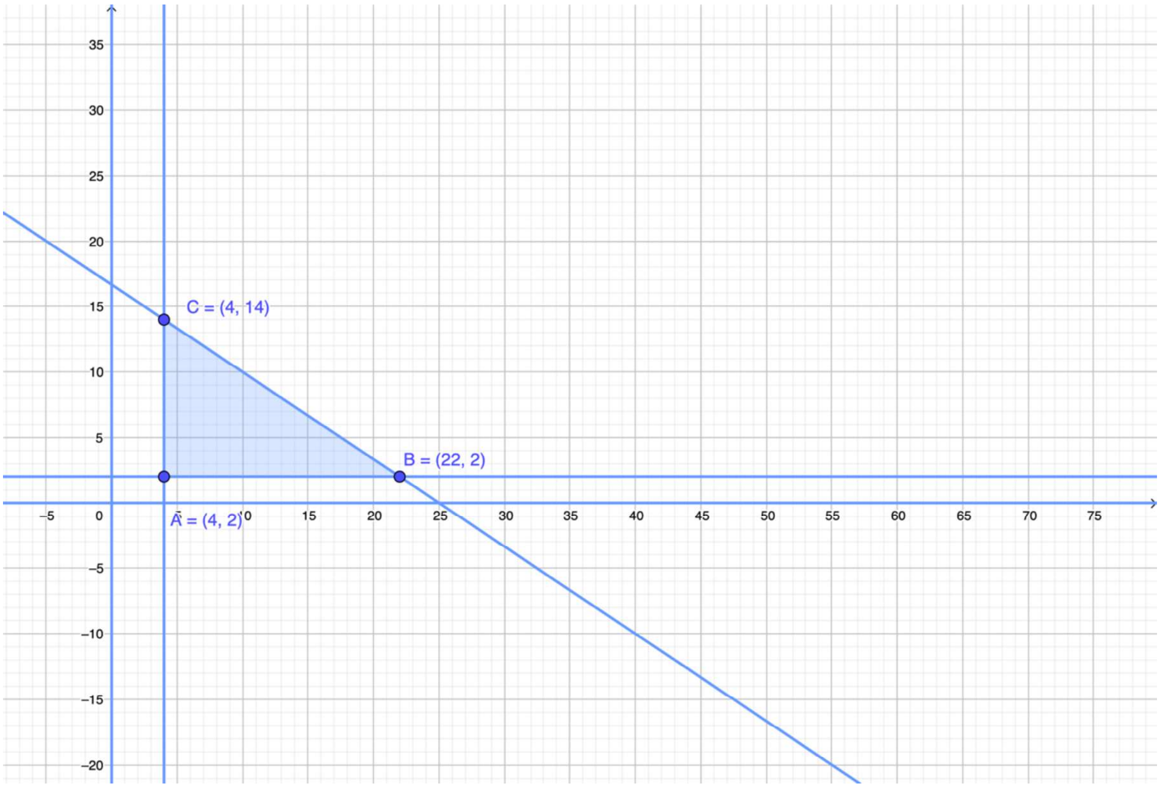


46. Ordenadores. Un almacén vende dos modelos de ordenadores portátiles. Debido a la demanda, tiene un stock de al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. El coste de almacenaje de los modelos A y B es de 400 y 600 €, respectivamente. El gerente no quiere tener más de 10 000 € en inventario y, además, para poder atender a la demanda de manera rápida mantiene al menos 4 ordenadores del modelo A y 2 del modelo B. Encuentra un sistema de inecuaciones que describa las posibilidades de inventario de este almacén. Después, halla los vértices de la región factible.

Sean x = "número de vidas del modelo A" e y = "número de vidas del modelo B".

El sistema de inecuaciones que permite averiguar las distintas posibilidades del inventario de este almacén es el siguiente:

$$\begin{cases} 400x + 600y \leq 10000 & \leftarrow \text{Disponibilidad de almacenaje en euros} \\ x \geq 4 & \leftarrow \text{Modelos almacenados del A} \\ y \geq 2 & \leftarrow \text{Modelos almacenados del B} \\ x \geq 0, y \geq 0., x, y \in z. \end{cases}$$



La región factible está delimitada por el triángulo de vértices A (4, 2), B (22, 2) y C (4, 14).

47. Aviones. Una compañía área dispone de dos aviones para transporte de carga, el Boeing 747 y el Airbus 340, para cubrir un determinado trayecto durante un a o. El primero debe hacer, al menos, los mismos trayectos que el segundo, pero no debe realizar nunca m s de 120 vuelos, y, además, entre los dos aviones han de efectuar entre 60 y 200 vuelos al año. Cada vuelo del Boeing 747 consume 6000 litros, mientras que el Airbus 340 consume 4500 litros. ¿Cuántos vuelos debe realizar cada avión para que el consumo de combustible sea el mínimo posible?

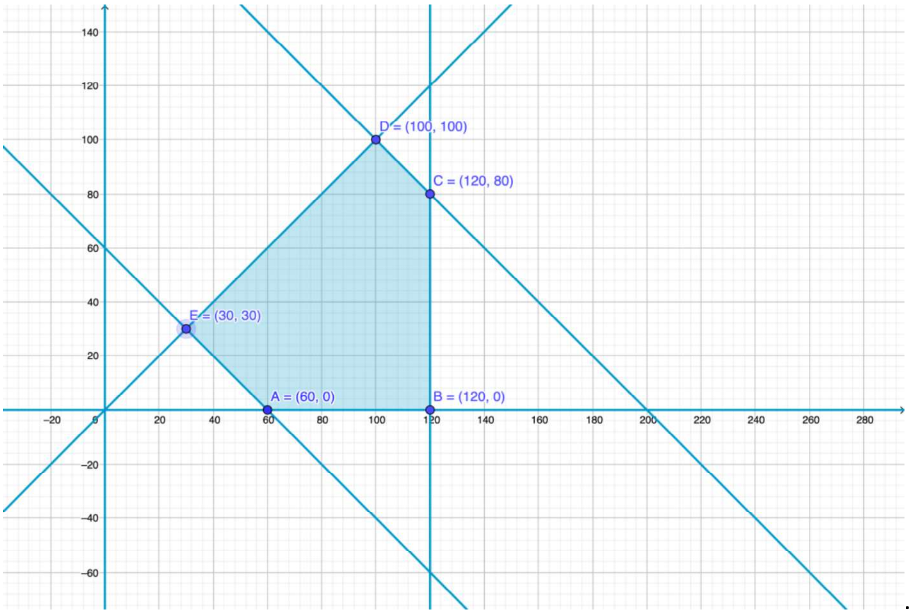
Consideremos:

$x =$ "número de vuelos del Boeing 747"

$y =$ "número de vuelos del Airbus 340"

Entonces: (Combustible) Minimizar $z = 6000x + 4500y$

$$\begin{cases} x \geq y \ \leftarrow \text{ Relación entre los aviones} \\ x \leq 120 \ \leftarrow \text{ Máximo nº de vuelos del Boeing} \\ 60 \leq x + y \leq 200 \ \leftarrow \text{ Vuelos entre los dos aviones} \\ x, y \geq 0, \ x, y \in z \end{cases}$$



La región factible tiene por vértices $A(60,0)$, $B(120,0)$, $C(120,80)$, $D(100,100)$ y $E(30,30)$.

Donde C es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x = 120 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

Y, D es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x = y \\ x + y = 200 \end{cases}$$

Veamos cuál es el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices.

Vértices	Valor de $z = 6000x + 4500y$
$A(60,0)$	360000
$B(120,0)$	720000
$C(120,80)$	1080000
$D(100,100)$	1050000
$E(30,30)$	315000 $\leftarrow$ *Mínimo*

Cada avión debe realizar 30 vuelos con el fin de que el consumo de combustible sea mínimo de 315 000 litros.

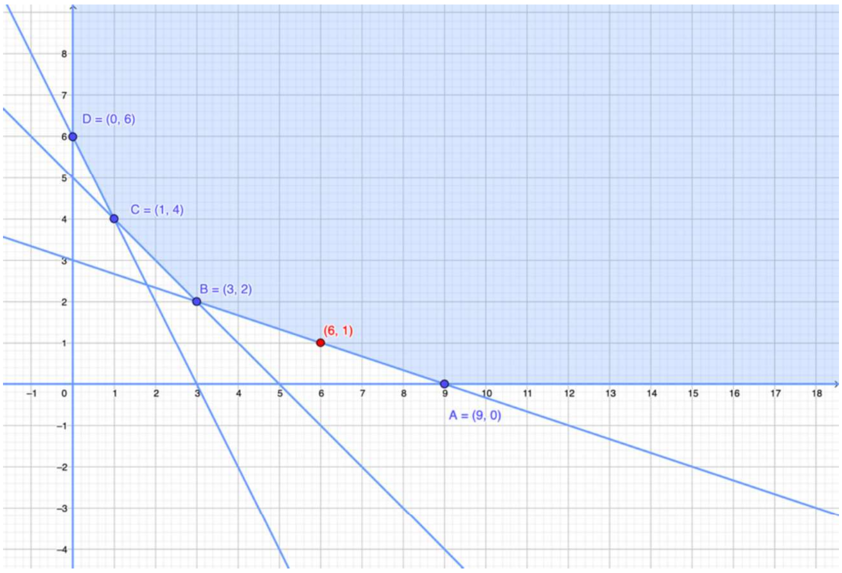
48. Nutrición. Una dieta requiere diariamente al menos 300 calorías, 36 unidades de vitamina A y 90 unidades de vitamina C. Un vaso de una bebida vegetal X tiene 60 calorías, 12 unidades de vitamina A y 10 unidades de vitamina C. Un vaso de otra bebida vegetal Y tiene 60 calorías, 6 unidades de vitamina A y 30 unidades de vitamina C.

Plantea un sistema de inecuaciones que describa el número de vasos de cada una de esas bebidas que debe tomar como mínimo para cumplir los requerimientos.

Un nutricionista recomienda a una persona que diariamente tome 6 vasos de la bebida X y un vaso de la bebida Y. Utiliza la región factible para verificar si esta combinación cumple los requisitos mínimos diarios.

Con la información del enunciado podemos construir la tabla siguiente:

	Calorías	Vitamina A	Vitamina C
Bebida vegetal X	60	12	10
Bebida vegetal Y	60	6	30
Total	300	36	90



Designar por x e y el número de vasos de las bebidas vegetales X e Y, respectivamente.

a) El sistema de inecuaciones que describe el número de vasos de cada uno de esas bebidas que se deben tomar, es el siguiente:

$$\begin{cases} 60x+60y \geq 300 \\ 12x+6y \geq 36 \\ 10x+30y \geq 90 \\ x, y \geq 0, x, \quad y \in z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 5 \\ 2x+y \geq 6 \\ x+3y \geq 9 \\ x, y \geq 0, \quad x, y \in z. \end{cases}$$

b) La región factible es abierta y tiene por vértices A (9, 0), B (3, 2), C (1, 4) y D (0, 6).

Como se puede comprobar la combinación de 6 vasos de la bebida X y un vaso de la bebida Y, es decir, el punto (6, 1) está en la región factible y por tanto, cumple los requisitos mínimos diarios.

49. Desarrollo de nuevos productos. El departamento de investigación de Gestionsa ha desarrollado dos nuevos productos A y B que se fabrican en dos plantas P1 y P2. La elaboración de una unidad del producto A requiere 3 horas en la planta P1 y 4 horas en la planta P2, y cada unidad de B necesita 2 horas en P1 y 6 horas en P2. Además, se sabe que semanalmente se dispone de 22 horas en la planta P1 y 36 horas en la planta P2 para la fabricación de estos nuevos productos.

Debido a las condiciones del mercado, semanalmente a lo sumo se venderán 6 unidades del producto A y 4 de B. La ganancia en miles de euros por cada unidad de los productos A y B es 7 y 5, respectivamente. Formula un modelo de programación lineal que permita averiguar las unidades de cada producto que se deben fabricar de forma semanal con el fin de maximizar las ganancias de la empresa.

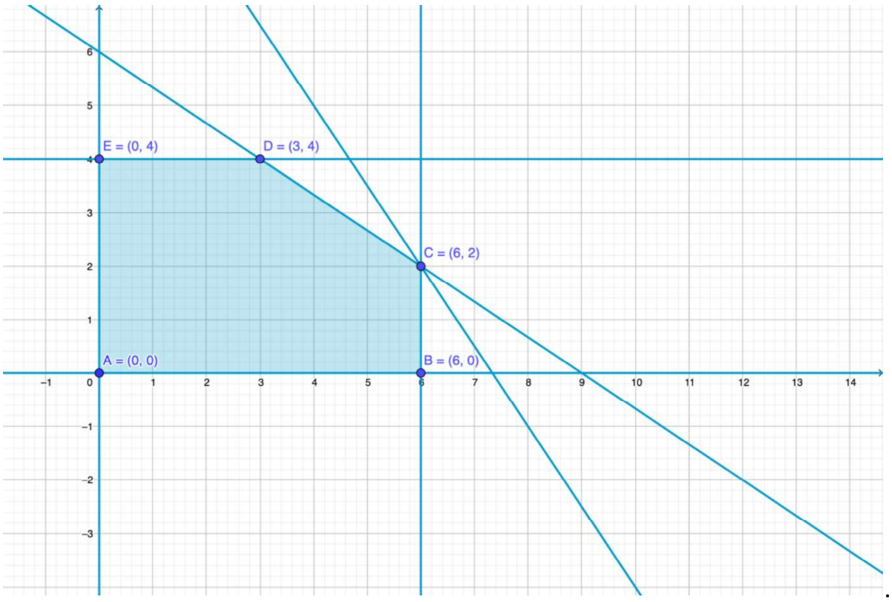
Resumimos la información del enunciado en la siguiente tabla:

Productos ↓ . Planta →	$P1$	$P2$	Ventas (unidades)
$(x)A$	3	4	6
$(y)B$	2	6	4
Disponibilidad	22	36	

Designado por x el número de unidades fabricadas del producto A, semanalmente, e y el número de unidades fabricadas del producto B, semanalmente, entonces el problema de programación lineal que resuelta es:

(Ganancias miles de €) Maximizar $z = 7x + 5y$

$$\begin{cases} x \leq 6 \leftarrow \text{ Condiciones de mercado (en unidades)} \\ y \ \leq 4 \leftarrow \text{ Condiciones de mercado (en unidades)} \\ 3x + 2y \leq 22 \leftarrow \text{ Disponibilidad en horas semanales, en la planta P1} \\ 4x + 6y \leq 36 \leftarrow \text{ Disponibilidad en horas semanales, en la planta P2} \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible está delimitada por el polígono $ABCDE$ que tiene por vértices $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,2)$, $D(3,4)$ y $E(0,4)$.

Calculemos, pues, cuál es el valor de la función objetivo en los vértices.

Vértices	Valor de $z = 7x + 5y$

$A(0,0)$	0
$B(6,0)$	42
$C(6,2)$	$52 \leftarrow$ *Máximo*
$D(3,4)$	41
$E(0,4)$	20

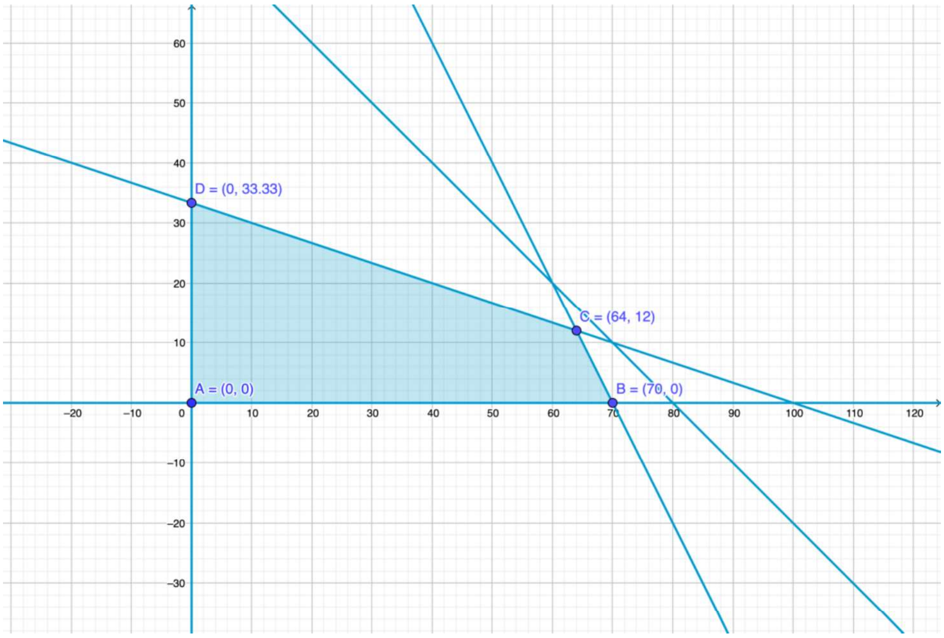
Se deberán fabricar, por tanto, 6 unidades del producto A y 2 unidades del producto B semanalmente, para maximizar las ganancias por un importe de 52000€.

50. Agricultor. Un agricultor tiene 80 hectáreas disponibles en los que tiene plantados dos tipos de árboles frutales: cerezos y melocotoneros. Con los trabajadores de que dispone, la poda de una hectárea de cerezos lleva dos d as y la de una hectárea de melocotoneros, un día. Dispone de 140 días de noviembre a marzo para hacer la poda. Por otro lado, para la recolección de la fruta entre los meses de mayo a julio dispone como máximo de 100 días. Se sabe que la recolección de una hectárea de cerezo lleva un día, y tres días para una hectárea de melocotoneros. El agricultor se plantea conocer cuál es la superficie óptima para cada tipo de árbol frutal, si la ganancia es de 200 000 euros por hectárea de cerezos y 278 000 euros por la de melocotoneros.

Sea x e y el número de hectáreas dedicadas a cerezos y melocotoneros, respectivamente. Entonces:

(Ganancia, miles de euros) $z = 200x + 278y$

$$\begin{cases} x + y \leq 80 \leftarrow \text{Hetáreas disponibles} \\ 2x + y \leq 140 \leftarrow \text{Dias de poda} \\ x + 3y \leq 100 \leftarrow \text{Dias de recolección} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible tiene por vértices $A(0,0)$, $B(70,0)$, $C(64,12)$ y $D\left(0,\dfrac{100}{3}\right)$. Siendo C la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x+y=140 \\ x+3y=100 \end{cases} \Rightarrow x=64, y=12$$

El valor de la función objeto en los vértices es:

Vértices	Valor $z=200x+278y$
$A(0,0)$	0
$B(70,0)$	14000
$C(64,12)$	$16136 \leftarrow Máximo$
$D\left(0,\dfrac{100}{3}\right)$	$9266,\widehat{6}$

El agricultor deberá plantar 64 hectáreas para cerezos y 12 hectáreas para melocotoneros para obtener una ganancia máxima de 16.136.000€.

51. Fabricación de artículos. Una empresa produce dos artículos A y B, para cuya elaboración necesita dos materias primas M1 y M2, de las que hay disponibles 3050 y 1500 unidades, respectivamente. Cada unidad de A requiere cuatro unidades de M1 y tres unidades de M2; mientras que cada unidad de B necesita cinco unidades de M1 y dos unidades de M2. Los precios de venta son de 95 euros cada unidad

de A, y de 100 euros cada unidad de B. Los costes por unidad de fabricación del producto A ascienden a 32 euros y los del producto B a 28 euros. Por contratos firmados hay que fabricar al menos 300 unidades del producto B. Formula y resuelve un problema de programación lineal que proporcione un plan de producción con el fin de maximizar el beneficio.

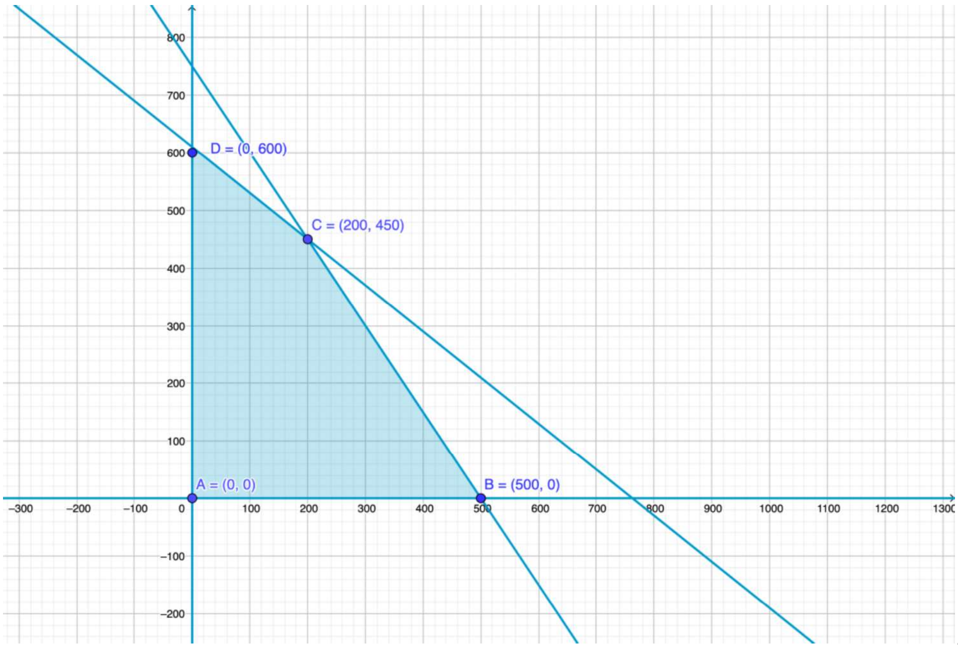
Con el fin de simplificar la información del enunciado construimos la siguiente tabla:

		Materias primas			
		M1	M2	Precio venta	Coste
Artículos	A	4	3	95€	32€
	B	5	2	100€	28€
Disponibilidad		3050	1500		

Designamos por x e y el número de artículos producidos de A y B, respectivamente. Entonces:

Máximo $z=(95x+100y)-(32x+28y)=63x+72y$

s.a. $\begin{cases} 4x+5y\le 3050 & \leftarrow \text{ Disponibilidad de M1} \\ 3x+2y\le 1500 & \leftarrow \text{ Disponibilidad de M2} \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$



La región factible está delimitada por el polígono de vértices $A(0,0)$, $B(500,0)$, $C(200,450)$ y $D(0,600)$.

Vértices	$A(0,0)$	$B(500,0)$	$C(200,450)$	$D(0,600)$
Valor $z=63x+72y$	0	31500	$45000 \leftarrow Máx$	43200

Deberá producir 200 artículos A y 450 artículos B. De esta manera el beneficio máximo será de 45 000 €.

52. Empleados de un hipermercado. Un hipermercado está abierto 16 horas al día en dos turnos de ocho horas: uno desde las 6 de la mañana hasta las 14 horas, y otro desde las 14 hasta las 22 horas. El número mínimo de empleados que necesita diariamente para su funcionamiento es de 20 en el primer turno y de 15 en el segundo. Por otro lado, como mucho puede contratar a 50 empleados en total. El gerente del hipermercado sabe que obtiene unas ventas diarias de 3 millones de euros durante el turno de mañana y de 5 millones de euros en el turno de tarde. Formula y resuelve un modelo de programación lineal que proporcione el n mero de empleados que debe contratar diariamente para satisfacer las necesidades requeridas y maximizar los ingresos por ventas.

Sean x e y el mínimo de empleados de primer turno y del segundo turno, respectivamente. Entonces, el problema de programación lineal resulta:

Maximizar $x=3x+5y$ (Ingresar en millones de €)

s.a. $\begin{cases} x+7\leq 50 \leftarrow \text{Máximo número de empleados} \\ x\geq 20 \leftarrow \text{Necesidades del primer turno} \\ y\geq 15 \leftarrow \text{Necesidades del segundo turno} \\ x,y\in z \end{cases}$

La región factible es un triángulo de vértices $A(20,15)$, $B(35,15)$ y $C(20,30)$.

El valor de la f. objetivo en cada uno de los vértices es:

Vértices	Valor de $z=3x+5y$
$A(20,15)$	135
$B(35,15)$	180
$C(20,30)$	$210 \leftarrow Máximo$

El hipermercado debe contratar 20 empleados en el primer turno (de 6 a 14 horas) y 30 empleados en el segundo turno (de 14 a 22 horas). Así, obtendrá unos ingresos por rentas de 210 millones de €.

53. Pizzas a domicilio. Una empresa se dedica a llevar pizzas a domicilio. Los riders tienen dos tipos de contrato: 20 horas semanales (media jornada) y 40 horas a la semana (jornada completa). A cada empleado con jornada completa se les paga a 19 euros la hora, siendo 16 euros el precio de la hora de un trabajador a media jornada. Por otra parte, la empresa puede pagar como máximo 1200 horas a la semana, y necesita, al menos 25 empleados. ¿Cuántos riders con cada tipo de contrato debe contratar semanalmente con el fin de minimizar el coste de los salarios?

Sean:

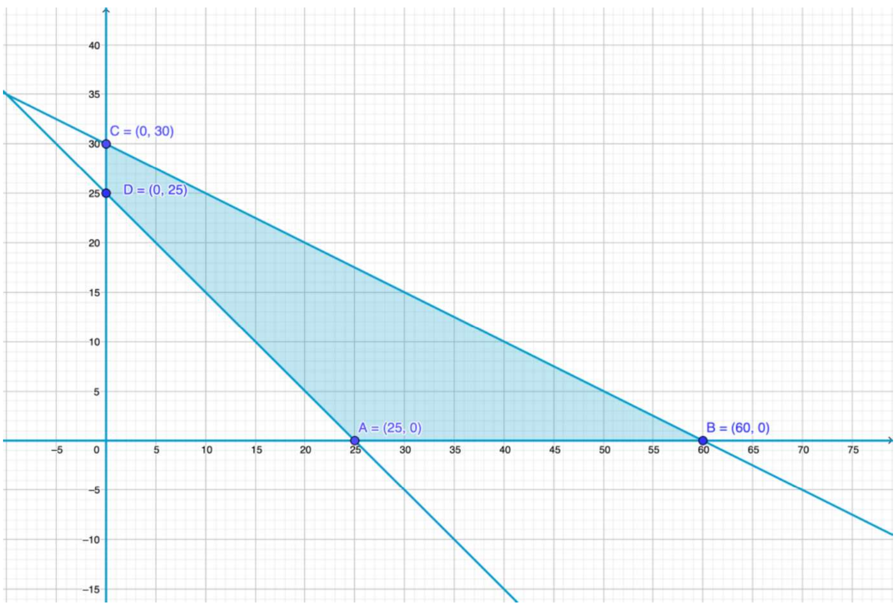
$x =$ "riders contratados a media jornada (20 horas)"

$y =$ "riders contratados a jornada completa (40 horas)

El problema de programación lineal es el siguiente:

Maximizar $z = 16 \cdot 20x + 19 \cdot 40y = 320x + 760y$

$$\begin{cases} 20x + 40y \leq 1200 \leftarrow \text{Máximo de horas semanales} \\ x + y \geq 25 \leftarrow \text{Necesidades mínimas de riders} \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in z \end{cases}$$



La región factible tiene por vértices $A(25,0)$, $B(60,0)$, $C(0,30)$ y $D(0,25)$.

Calculemos, pues, el valor de la función objetivo en ellos.

Vértices	Valor $z = 320x + 760y$
$A(25,0)$	$8000 \leftarrow \textit{Mínimo}$
$B(60,0)$	19200
$C(0,30)$	22800
$D(0,25)$	19000

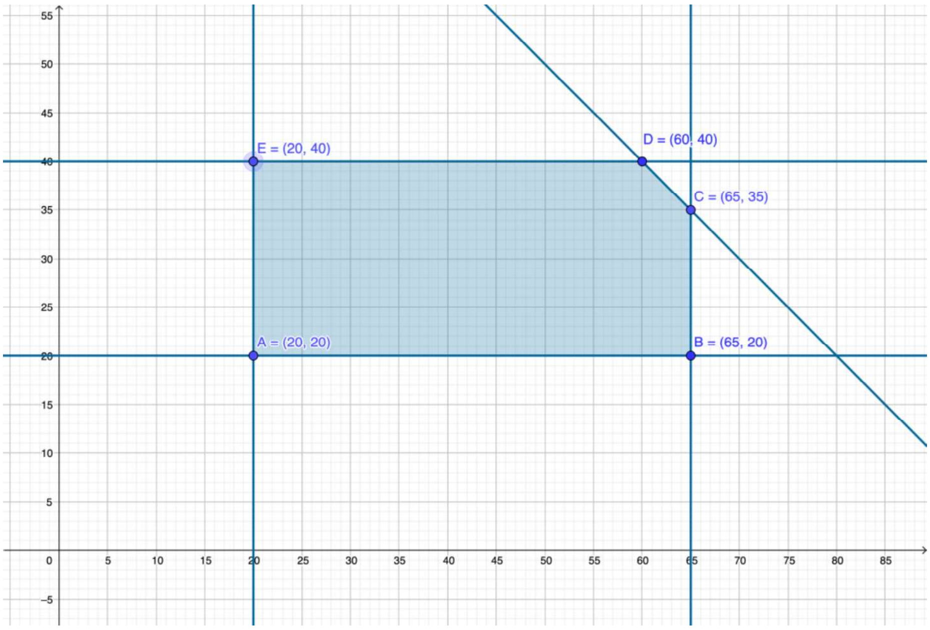
Deben contratar solo 25 riders a media jornada con el fin de lograr unos costes mínimos de 8000€.

54. Centro de idiomas. Un centro de enseñanza de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 20 y 65 estudiantes del básico y entre 20 y 40 en el avanzado. Siendo 100 el n mero máximo de estudiantes que puede atender en total. Los beneficios que genera cada estudiante en el curso básico se estiman en 145 € y en 150 € por cada estudiante del curso avanzado. Encuentra el número de estudiantes de cada curso que proporciona el máximo beneficio.

El número de estudiantes que asisten al curso básico lo indicaremos por x, mientras que los que asisten al curso avanzado lo señalaremos por y. Entonces:

Maximizar $z = 145x + 150y$ (Beneficios)

s.a. $$\begin{cases} 20 \le x \le 65 & \leftarrow \text{ Curso básico (estudiantes)} \\ 20 \le y \le 40 & \leftarrow \text{ Curso avanzado (estudiantes)} \\ x + y \le 100 & \leftarrow \text{ Total de estudiantes} \\ x, y \in z \end{cases}$$



La región factible está delimitada por los vértices $A(20,20)$, B(65, 20), C(65, 35), D(60, 40) y E(20, 40)

El valor de la función objetivo en los vértices es:

Vértices	Valor $z=145x+150y$
$A(20,20)$	5900
B(65, 20)	12425
C(65, 35)	14675
D(60, 40)	$14700 \leftarrow Máximo$
E(20, 40)	8900

El máximo beneficio de 14700€ se consigue con 60 estudiantes matriculados en el curso básico y 40 en el curso avanzado.

55. Publicidad. Una empresa presupuesta 500000 € en publicidad en televisión. Cada anuncio en la televisión abierta cuesta 10000 € y en la de pago, 20000 €. En función de los estudios de audiencia, estima que en la televisión en abierto ver en el anuncio 20 millones de personas y en la de pago lo harán 3 millones. El departamento encargado establece que, como máximo, se gaste un 6 % del presupuesto en la televisión abierta. ¿Qué presupuesto se deber a destinar en cada uno de los medios para maximizar su audiencia?

Sean:

$x =$ "Número de anuncios en la televisión abierta"

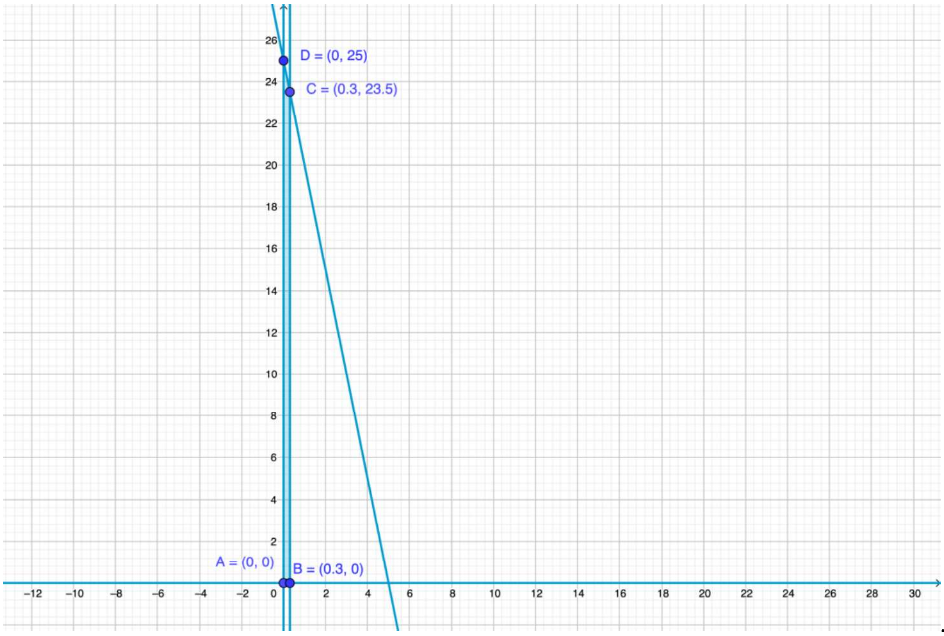
$y =$ "Número de anuncios en la televisión de pago"

Entonces:

Maximizar $w = 20x + 3y$ (audiencia en millones de personas)

$$\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}02y \le 0{,}5 \leftarrow \text{ Presupuesto (millones de €)} \\ x \le 0{,}3 \leftarrow \text{ Departamento (300.000€)} \\ x \ge 0, y \ge 0, x, y \in z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + y \le 0{,}5 \\ x \le 0{,}3 \\ x \ge 0, y \ge 0, x, y \in z \end{cases}$$



La región factible está delimitada por los vértices $A(0,0)$, $B(0{,}3;0)$, $C(0{,}3;23{,}5)$ y $D(0,25)$.

Vértices	Valor $z = 20x + 3y$
$A(0,0)$	0
$B(0{,}3;0)$	6
$C(0{,}3;23{,}5)$	$76{,}5 \leftarrow Máximo$
$D(0,25)$	75

Se deberán gastar 300000€ en la televisión en abierto, 23,5 millones de € en la televisión de pago, con el fin de tener una audiencia de 76,5 millones de personas.

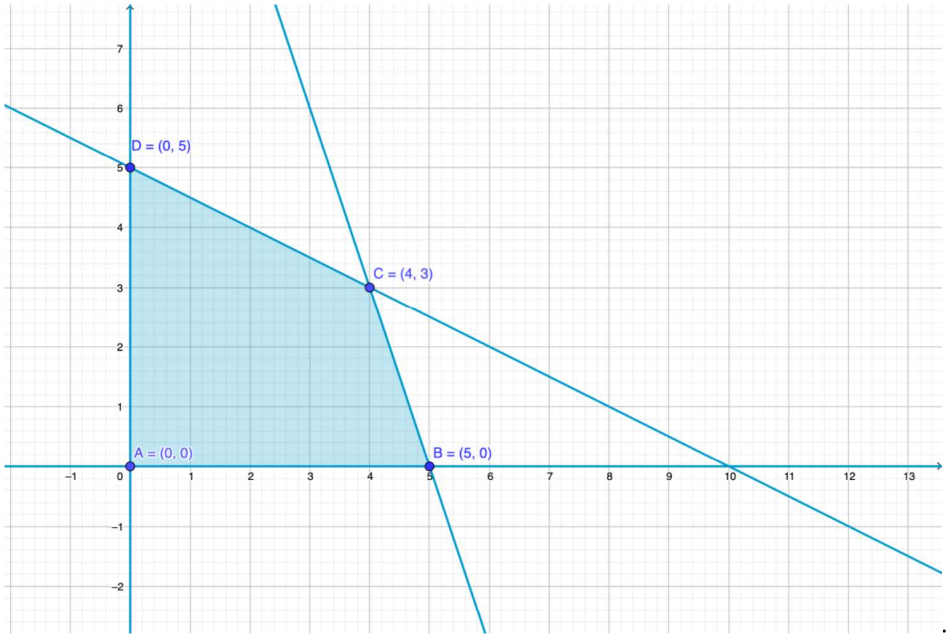
56. Paneles solares. Dos amigos se dedican a la venta, montaje y puesta en funcionamiento de dos tipos de paneles solares fotovoltaicos, A y B. Una vivienda media con paneles del tipo A requiere de 12 horas de instalación y 4 horas de puesta en funcionamiento, mientras que con paneles del tipo B necesita 4 horas de montaje y 8 de puesta en funcionamiento. Para la próxima semana dispondrán como máximo de 60 horas para dedicar al montaje y de 40 para la puesta en funcionamiento de estas placas. El beneficio que obtienen por cada trabajo en una vivienda media es de 1400 € con paneles del tipo A y 1600 € con los del tipo B. ¿Cuántas viviendas con paneles fotovoltaicos de cada tipo les interesa preparar durante la próxima semana para maximizar el beneficio?

Sean x e y el mínimos de paneles fotovoltaicos de los tipos A y B , respectivamente. Entonces:

Maximizar $z = 1400x + 1600y$ (Beneficio semanal)

$$\begin{cases} 12x + 4y \le 60 & \leftarrow \text{Disponibilidad montaje (horas)} \\ 4x + 8y \le 40 & \leftarrow \text{Disponibilidad funcionamiento (horas)} \\ x \ge 0, y \ge 0, x, y \in z \end{cases}$$

s.a. $$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y \le 15 \\ x + 2y \le 10 \\ x \ge 0, y \ge 0, x, y \in z \end{cases}$$



La región factible tiene por vértices el polígono $ABCD$, donde A(0, 0), $B(5,0)$, $C(4,3)$ y $D(0,5)$.

Vértices	Valor $z = 1400x + 1600y$
A (0, 0)	0
$B(5,0)$	7000
$C(4,3)$	$10400 \leftarrow Máximo$
$D(0,5)$	8000

Los amigos deben montar 4 paneles fotovoltaicos del tipo A, 3 paneles fotovoltaicos del tipo B. En total 7 viviendas para la próxima semana con unos beneficios de 10.400€.

Prepárate para la universidad

57. Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4,5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7,5 kg de grano de Colombia y 1,5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67,5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) Representa la región factible que describe el problema anterior y determina sus vértices.

b) Indica de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 € y de cada kilogramo del tipo B es 4 €, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Andalucía

Con la información del enunciado podemos construir la siguiente tabla:

Tipo grano / concentrado	A	B	Disponibilidades
Colombia	4,5	7,5	67,.5
Etiopía	3	-	30
Costa Rica	-	1,5	9
Beneficios	2	4	

a) Sean x e y los kilogramos de café concentrados de los tipos A y B, respectivamente. Entonces el problema de programación lineal es el siguiente:

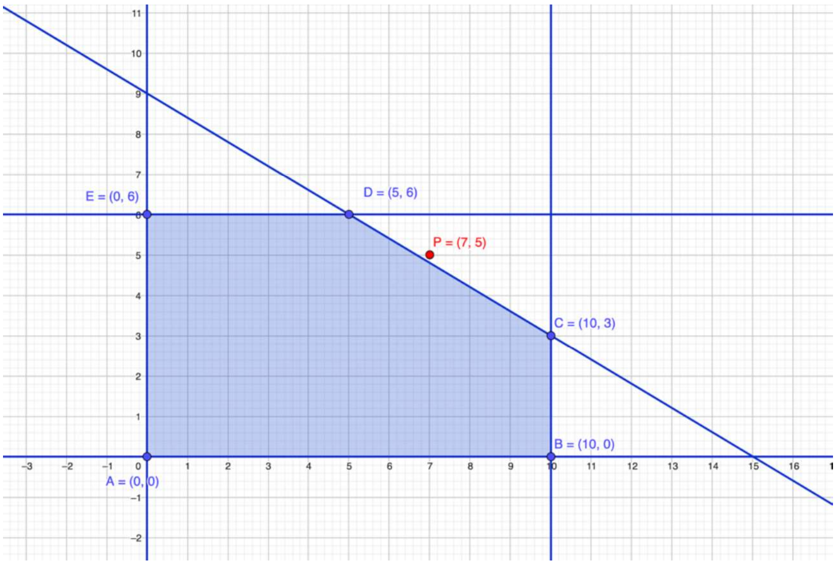
F. objetivo: maximizar z = 2x + 2y

$$\begin{cases} 4{,}5x + 7{,}5y \leq 67{,}5 \leftarrow \mathit{Disponibilidad\ de\ Colombia} \\ 3x \leq 30 \leftarrow \mathit{Disponibilidad\ de\ Etiopía} \\ 1{,}5y \leq 9 \leftarrow \mathit{Disponibilidad\ de\ Costa\ Rica} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

4,5x + 7,5y = 67,5, $x \leq 10, y \leq 6$

x	y
0	9
15	0

La región factible de la figura está delimitada por el polígono de vértices A(0, 0), B(10, 0), C(0, 3), D(5, 6), E(0, 6).



b) El punto P(7, 5) está fuera de la región factible y, por tanto, no es posible producir 7 kg del tipo A y 5 kg del tipo B.

c) Calculamos el valor de la función objetivo (beneficio) en cada uno de los vértices de la región factible:

Vértices	Valor de z
A	0
B	20
C	32
D	34 -> Máximo
E	24

58. Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja del tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja del tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja del tipo A obtiene un beneficio de 7 € y con cada caja del tipo B un beneficio de 5 €.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Comunidad Valenciana

a) Con la información del enunciado podemos construir la siguiente tabla:

Tipo miel / Tipo caja	A	B	Disponibilidades

Romero	2	1	280
Azahar	2	2	300
Multifloral	1	2	250
Beneficios	7	5	

a) Sean x e y el número de cajas de los tipos A y B, respectivamente. Entonces el problema de programación lineal es el siguiente:

F. objetivo: maximizar z = 7x + 5y

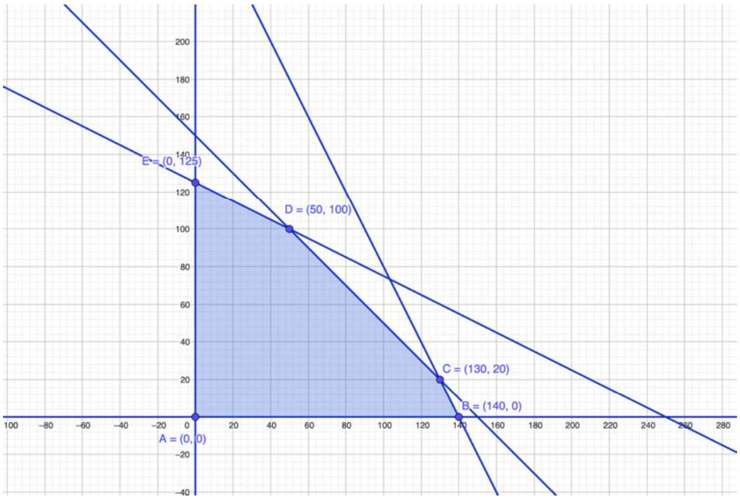
Restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 280 \rightarrow Disponibilidad\ de\ miel\ de\ romero \\ 2x + 2y \leq 300 \leftarrow Disponibilidad\ de\ miel\ de\ azahar \\ x + 2y \leq 250 \leftarrow Disponibilidad\ de\ miel\ multifloral \\ x \geq 0, y \geq 0; x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Recta	Puntos de corte	P(0, 0)	Conclusión
r_1: 2x + y = 280	(140, 0) y (0, 280)	$0 \leq 280$	Sí
r_2: 2x + 2y = 300	(150, 0) y (0, 150)	$0 \leq 300$	Sí
r_3: x + 2y = 250	(250, 0) y (0,125)	$0 \leq 230$	Sí

El vértice C es la intersección de r1 y r2, luego: C(130, 20). El vértice D es la intersección de r2 y r3, luego D(50, 100).

Así, el polígono queda: A(0, 0), B(140, 0), C(130, 20), D(50, 100), E(0, 125).



c) Calculamos el valor de la función objetivo (beneficio) en cada uno de los vértices de la región factible:

Vértices	Valor de z
A	0

B	980
C	1010 -> Máx.
D	850
E	625

59. Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A y el modelo B. El coste de producir 1 m del modelo A es 2 €, mientras que el coste de producir 1 m del modelo B es 0,5 €. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan, al menos, 6000 m de cable, aunque del modelo B no podrá fabricarse más de 5000 m. Y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8000 m entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B mayor o igual a la de metros del modelo A.

a) Representa la región factible y calcula las coordenadas de sus vértices.

b) Determina el número de metros que deben producirse de cada uno de los dos modelos para minimizar el coste.

Madrid

a) Sean x e y los kilómetros de cable de los modelos A y B, respectivamente.

F. objetivo: minimizar z = 2x + 0,5y

Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \rightarrow Lanzamiento\ comercial \\ y \leq 5 \leftarrow Limitaciones\ del\ modelo\ B \\ x + y \leq 8 \leftarrow Coste\ producción \\ y \geq x \rightarrow Relación\ entre\ los\ modelos\ de\ cable \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Para dibujar la región factible, recurrimos a la tabla siguiente:

Recta	Puntos de corte	P(0, 0)	Conclusión
r_1: x + y = 6	(6, 0) y (0, 6)	$P(0,0): 0 \geq 6$	No
r_2: y = 5	(0, 5)	$P(0,0): 0 \leq 5$	Sí
r_3: x + y = 8	(8, 0) y (0, 8)	$P(0,0): 0 \leq 8$	Sí
r_4: y = x	(0, 0)	$P(1,0): 1 \geq 0$	Sí

Los vértices de la región factible corresponden a los puntos: A(3, 3), B(4, 4), C(3, 5), D(1, 5).