14- Se considera el siguiente sistema de inecuaciones lineales: $\begin{cases} x-2y\le 2 \\ 2x+y\le 6 \\ x+2y\le 5 \\ x+y\ge 1 \end{cases}$

Dibuja la región factible en el primer cuadrante.

Maximiza la función objetivo $z=4x+5y$.

Maximiza la función objetivo $w=2x+y$.

Construimos la siguiente tabla para dibujar la región factible:

Ecuación	Punto de corte en los ejes	Punto de prueba $P(0,0)$
r1: x – 2y = 2	$(2,0)$ y $(0,-1)$	$0\le 2$ Sí
$r_2: 2x+y=6$	$(3,0)$ y $(0,6)$	$0\le 6$ Sí
$r_3: x+2y=5$	$(5,0)$ y $(0,\frac{5}{2})$	$0\le 5$ Sí
$r_4: x+y=1$	$(1,0)$ y $(0,1)$	$0\ge 1$ No

Veamos cuáles son los vértices de la región factible.

$A(1,0)$, $B(2,0)$

C es la intersección de las rectas r_1 y r_2

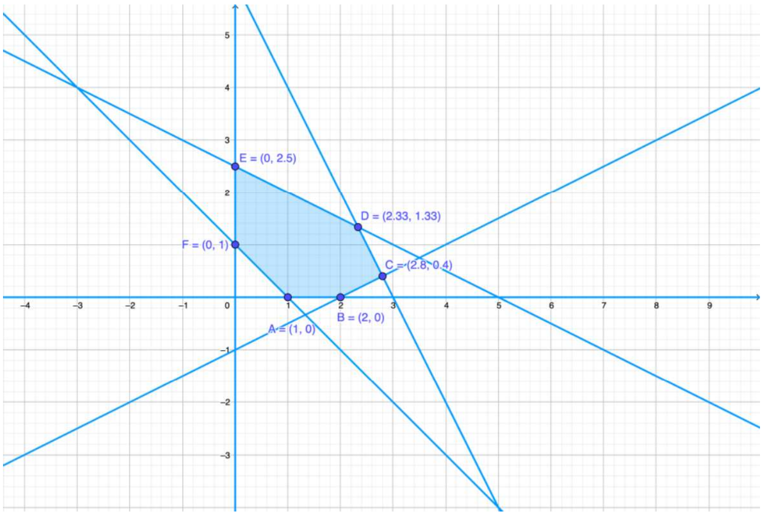
$\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x+y=6 \end{cases}$ $\quad C\left(\frac{14}{5},\frac{2}{5}\right)$

D es la intersección de las rectas r_2 y r_3

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+2y=5 \end{cases} \qquad D\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$E\left(0,\frac{5}{2}\right) \qquad F(0,1)$$

La región factible es la siguiente:



y c) A continuación, calculamos el valor de Z y W en cada uno de los vértices de la región.

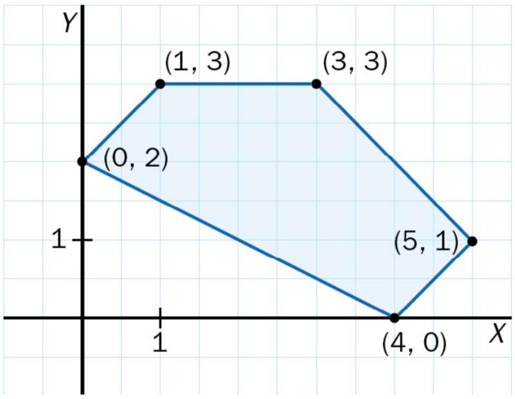
Vértices	Valor $z=4x+5y$	Valor $w=2x+y$
$A(1,0)$	4	2
$B(2,0)$	8	4
$C\left(\frac{14}{5},\frac{2}{5}\right)$	$\frac{66}{5}$	$6 \leftarrow Máximo$

$D\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$	$16 \leftarrow Máximo$	$6 \leftarrow Máximo$
$E\left(0,\frac{5}{2}\right)$	$\frac{25}{2}$	$\frac{5}{2}$
$F(0,1)$	5	1

El máximo de la función z tiene un valor 16 y se alcanza en el vértice $D\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Por su parte, el máximo de la función w es 6 y alcanza en los infinitos puntos de la arista CD. Es decir, múltiples ópticas.

15. Calcula el máximo y el mínimo de la función objetivo $w = x + y$ sobre la región factible de la figura. Halla el sistema de inecuación que da lugar a esa región factible.



Si $A(4,0)$, $B(5,1)$, $C(3,3)$, $D(1,3)$ y $E(0,2)$. Entonces:

Vértices	Valor de la f.objeto $w = x + y$
$A(4,0)$	4
$B(5,1)$	$6 \leftarrow Máximo$
$C(3,3)$	$6 \leftarrow Máximo$
$D(1,3)$	4
$E(0,2)$	$2 \leftarrow Mínimo$

El máximo es $w_{Máx} = 6$ y se alcanza en todos los puntos de la arista BC. Por otra parte, el mínimo es $w_{Mín} = 2$ en el vértice E.

A continuación, vamos a encontrar las ecuaciones de todas las rectas que delimitan el polígono de la región factible.

r_1 : recta que pasa por $A(4,0)$ y $B(5,1)$.

$$\frac{y-1}{0-1} = \frac{x-5}{4-5} \Rightarrow -y+1 = -x+5 \Rightarrow x-y=4$$

r_2 : recta que pasa por $B(5,1)$ y $C(3,3)$.

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-3}{5-3} \Rightarrow 2y-6 = -2x+6 \Rightarrow x+y=6$$

r_3 : recta que une los vértices $C(3,3)$ y $D(1,3)$

$y=3$ (recta horizontal)

r_4 : recta que une $D(1,3)$ y $E(0,2)$

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-0}{1-0} \Rightarrow y-2 = x \Rightarrow x-y=-2$$

r_5 : recta que pasa por $E(0,2)$ y $A(4,0)$

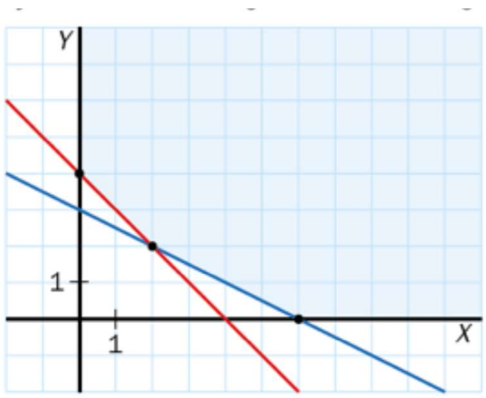
$$\frac{y-0}{2-0} = \frac{x-4}{0-4} \Rightarrow -4y = 2x-8 \Rightarrow x+2y=4$$

Buscando el semiplano solución de cada una de ellas, se tiene el siguiente sistema de inecuaciones considerando el primer cuadrante:

$$\begin{cases} x-y \le 4 \\ x+y \le 6 \\ y \le 3 \\ x+2y \ge 4 \\ x-y \ge -2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

5. Problemas de programación lineal con región factible no acotada

16. Escribe un sistema de inecuaciones que describa la siguiente región factible. Posteriormente, determina el mínimo de la función objetivo $z = 3x + 10y$ sobre dicha región.



Los puntos de corte en los ejes de la recta (en rojo) son $(4,0)$ y $(0,4)$. Luego:

$$r_1: \frac{y-4}{0-4} = \frac{x-0}{4-0} \Rightarrow 4y-16 = -4x \Rightarrow x+y=4$$

Mientras que los puntos de corte de la recta (en azul) son $(6,0)$ y $(0,3)$.

$$r_2 = \frac{y-3}{0-3} = \frac{x-0}{6-0} \Rightarrow 6y - 18 = -3x \Rightarrow x + 2y = 6$$

Como la región factible está situada en el primer cuadrante y, además, el punto $P(0,0)$ no se encuentra en ella, entonces el sistema de inecuación es:

$$\begin{cases} x+y \geq 4 \\ x+2y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

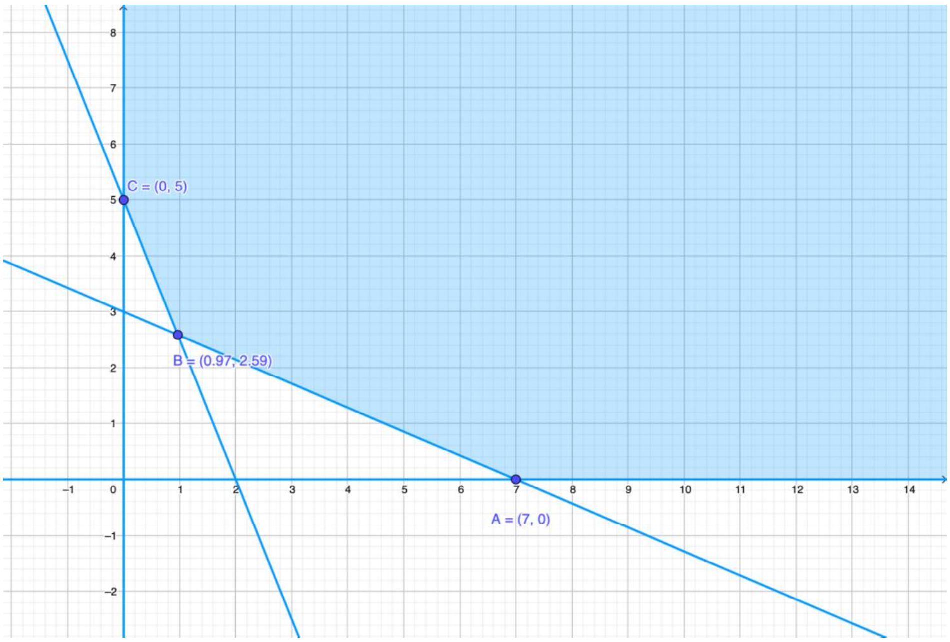
Los vértices de la región factible son $A(6,0)$, $B(2,2)$ y $C(0,4)$. Luego:

Vértices	$A(6,0)$	$B(2,2)$	$C(0,4)$
$z = 3x + 10y$	$18 \leftarrow Mínimo$	26	40

Por tanto, $z_{min} = 18$ en el vértice $A(6,0)$.

17. Dibuja la región del objetivo limitada por las siguientes inecuaciones. Después, calcula el máximo de la función $z = 3x + 2y$**.**

$$\begin{cases} 3x + 7y \geq 21 \\ 5x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son $A(7,0)$, $B\left(\frac{28}{29}, \frac{75}{29}\right)$ y $C(0,5)$.

Como la región factible no está acotada, entonces el máximo no existe, es decir, no tiene solución finita.

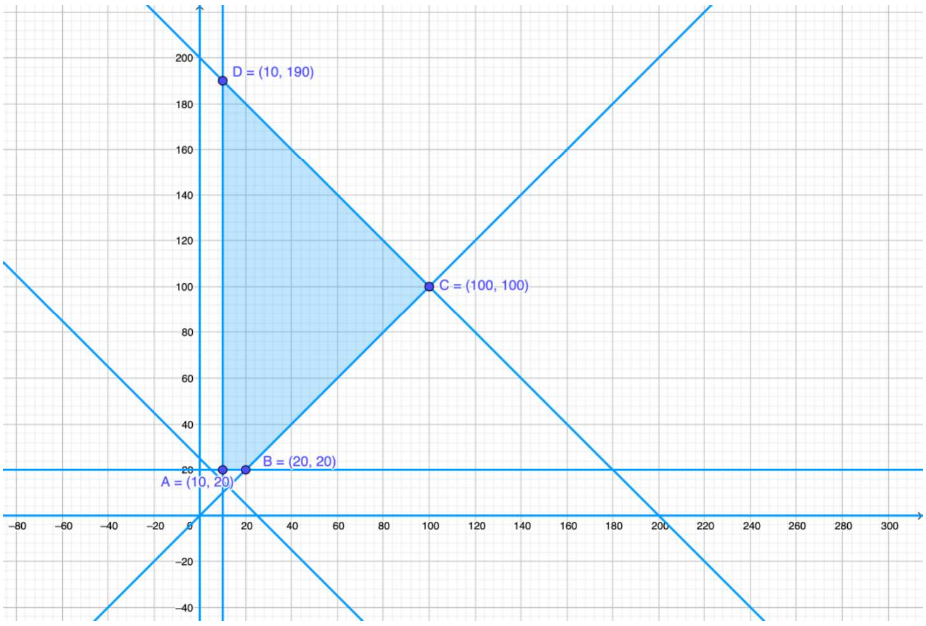
18. Gestión de residuos. Una empresa de gestión de residuos dispone de contenedores para lodos y para residuos, teniendo siempre en reserva un mínimo de 10 contenedores de lodos y de 20 de residuos. Además, siempre tiene más contenedores para residuos que para lodos. Por otro lado, almacena los

contenedores en un depósito con capacidad máxima para 200 contendedores, existiendo siempre, al menos, 25 contenedores. Se estima que los costes diarios de almacenaje de cada contenedor para lodos son de 20 euros y de cada contenedor para residuos, de 25 euros. ¿Cuántos contenedores de cada tipo debe almacenar para que la gestión sea más eficiente, es decir, con el mínimo coste de almacenaje?

Sean x e y el mínimo de contenedores para lodos y para residuos, respectivamente. Así, de la información de enunciado, obtenemos el siguiente problema de programación lineal:

$$Min\, z = 20x + 25y$$

$$\begin{cases} x \geq 10 \leftarrow \text{Reserva contenedores de lodos} \\ y \geq 20 \leftarrow \text{Reserva contenedores de residuos} \\ y \geq x \leftarrow \text{Relación entre ambos tipos de contenedores} \\ 25 \leq x + y \leq 200 \leftarrow \text{Capacidad del depósito de contenedores} \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in z \end{cases}$$



Los vértices de la región factible son $A(10,20)$, $B(20,20)$, $C(100,100)$ y $D(10,190)$.

Y, el valor de la función objetivo, en cada uno de los vértices figura en la siguiente tabla:

Vértices	$A(10,20)$	$B(20,20)$	$C(100,100)$	$D(10,190)$

Valor de $z = 20x + 25y$	$700 \leftarrow Mín$	900	4500	4950

Deberán almacenar 10 contenedoras para lodo y 20 contenedores para residuos con el fin de minimizar el coste de 700€. Observa que se trata de un problema de progresión lineal entera, pero como la solución es entera en un vértice, esta es la definitiva.

19. Autobuses. Una empresa de transporte de viajeros va a destinar, al menos, 12 autobuses para trasladar a 400 estudiantes en su viaje de fin de estudios. La empresa dispone de autobuses de 20 y 40 plazas. El coste estimado por kilómetro de un autobús pequeño es de 4,80 € y de 7,80 el de los grandes. ¿Cuántos autobuses de cada tipo se deben utilizar para minimizar los costes?

Sean $x =$ "autobuses de 20 plazas", $y =$ "autobuses de 40 plazas". Entonces obtenemos el siguiente problema de programación lineal:

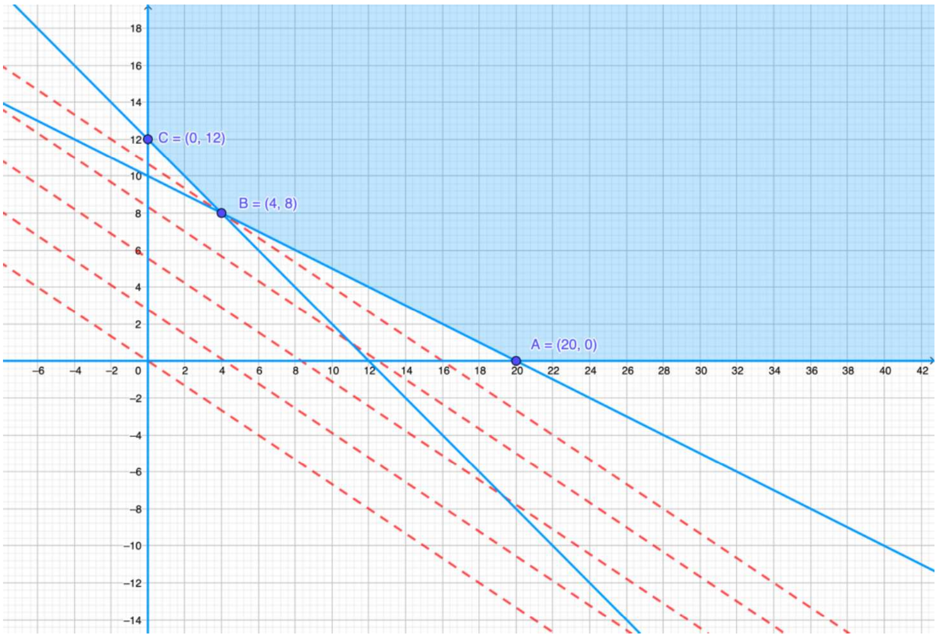
F. objetivo: Minimizar $z = 4{,}80x + 7{,}20y$, sujeta a las siguientes restricciones:

Autobuses. $\rightarrow x + y \geq 12$

Estudiantes. $\rightarrow 20x + 40y \geq 400 \Rightarrow$ [illegible]

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x, y \in \mathrm{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y \geq 12 \\ x + 2y \geq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in z \end{cases}$$



La región factible es abierta, es decir, no está acotada y tiene por vértices $A(20,0)$, $B(4,8)$ y $C(0,12)$.

Mediante el método gráfico podemos comprobar que es coste mínimo se alcanza con 4 autobuses de 20 plazas y 8 autobuses de 40 plazas, todo ello con un coste de 76,8€ por kilómetro.

6. Análisis de sensibilidad

20. Una empresa produce dos artículos A y B a partir de tres materias primas M, N y P, de las que para la próxima semana se tienen en existencias 7, 10 y 18 unidades, respectivamente. Cada unidad de A necesita 1 unidad de M, 2 unidades de N y 2 unidades de P. Y cada unidad del artículo B requiere 1 unidad de M, 1 unidad de N y 3 unidades de P. El beneficio que obtiene por la venta de cada unidad de los artículos A y B es de 5 y 6 euros, respectivamente. (Todo lo que se produce se vende).

Formula un problema de programación lineal que proporcione las unidades de los artículos A y B que debe fabricar con el fin de maximizar el beneficio por su venta.

Dibuja la región factible y halla la solución óptima. ¿Cuál es el beneficio que proporciona esta solución?

Se decide disminuir en un euro el beneficio de cada unidad del artículo A. Dibuja la función objetivo y trasládala paralelamente a sí misma sobre la región factible ¿Se modifica la solución óptima? ¿Hay más de una solución óptima? ¿Qué beneficios se obtiene en este caso y cuánto disminuyen?

Supóngase que se incrementa en 2 unidades las existencias de la materia prima N. ¿Se modifica la región factible? ¿Cambia la solución óptima? ¿Y el beneficio máximo?

Si las existencias de la materia prima M disminuyen en 2 unidades, ¿cuál es la región factible? ¿Se modifica la solución óptima?

Designamos por x e y el número de artículos producidos A y B, respectivamente.

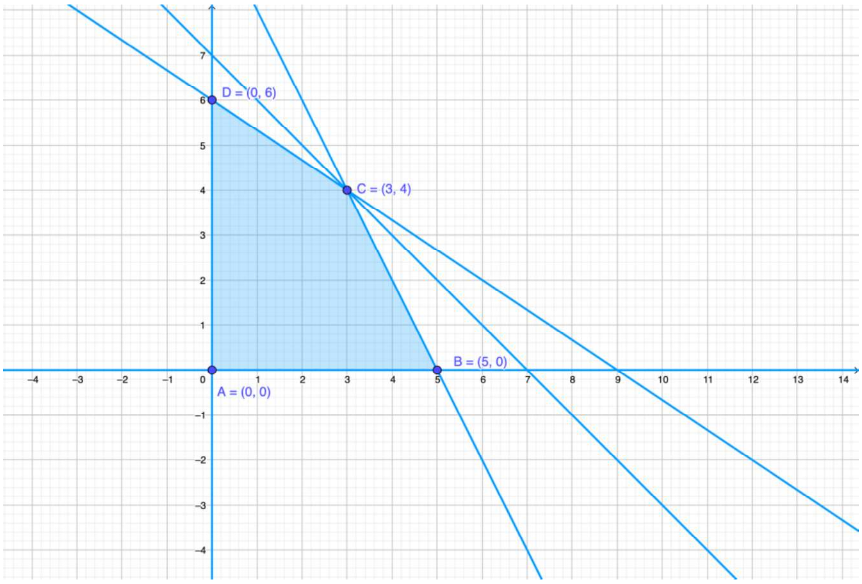
Con la información del enunciado construir esta tabla:

		Artículos		
		A	B	Existencias
Materia prima	M	1	1	7
	N	2	1	10
	P	2	3	18
Precio unitario		5	6	

La formulación de un problema de programación lineal que proporcionan las unidades de los artículos A y B que debe fabricar para maximizar el beneficio para su venta es:

Maximizar $z = 5x + 6y$

s.a. $\begin{cases} x + y \leq 7 \\ 2x + y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$



Los vértices de la región factible son $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(3,4)$ y $D(0,6)$.

Vértices	$A(0,0)$	$B(5,0)$	$C(3,4)$	$D(0,6)$
$z=5x+6y$	0	25	$39 \leftarrow Máx$	36

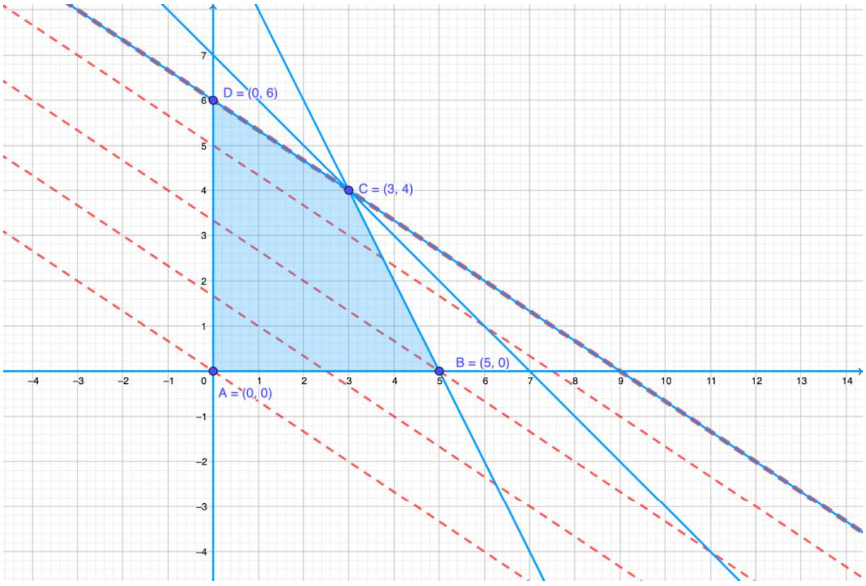
Debe fabricar 3 unidades del artículo A y 4 unidades del artículo B con el fin de lograr un beneficio óptimo (Máximo) de 39€.

Si se disminuye en 1€ el beneficio de cada artículo A, entonces la función objetivo nueva es:

$$w=4x+6y$$

La región factible no se modifica.

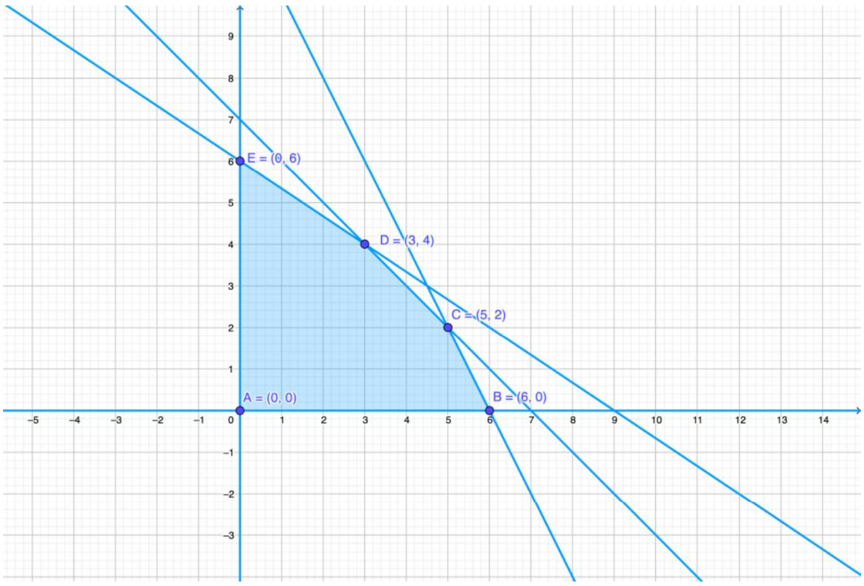
En este caso el enunciado propone que observemos el método gráfico.



Sí se modifica la solución óptima. De hecho, alcanza la solución óptima (máximo) en la arista CD y con un beneficio óptimo de 36€. Esto es, disminuye en 3€ el beneficio por venta.

Si se incremente en 2 unidades las existencias de N, entonces se ve modificada la región factible porque la segunda es:

$$2x + y \leq 12$$



La nueva región factible tiene por vértices $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(5,2)$, $D(3,4)$ y $E(0,6)$

Vértices	$A(0,0)$	$B(6,0)$	$C(5,2)$	$D(3,4)$	$E(0,6)$
$z=5x+6y$	0	30	37	$39 \leftarrow Máx$	36

El beneficio máximo es de 39€ y se consigue fabricando artículos de A y 4 artículos de B.

21. Una empresa fabrica microchips para mascotas de dos tipos, A y B. Para ello, utiliza dos materias primas P y G. Las existencias de materia prima para la próxima semana son de 120 unidades de P y de 30 unidades de G. Los beneficios por la venta de cada microchip del tipo A son 50 euros y 30 euros para cada uno del tipo B.

	A	B
P	6	8
G	1	3

Formula un modelo de programación lineal que permita averiguar cuántos microchips de cada tipo se deben fabricar con el fin de maximizar los beneficios por su venta, sabiendo que toda la fabricación se vende. Dibuja la región factible y determina el número óptimo de microchips de cada tipo que debe fabricar la empresa.

Si se incrementa a 70 euros el beneficio por cada chip del tipo B, manteniendo fijo el de A, ¿qué modificación sufre la solución óptima? ¿Y el beneficio?

Sean $x =$"microchips del tipo A"

$y =$" microchips del tipo B"

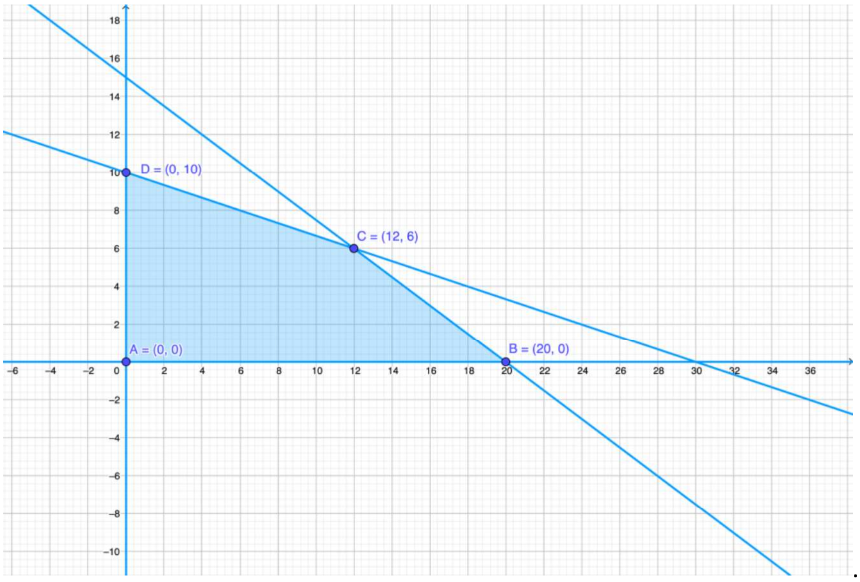
El modelo de programación lineal que, permite encontrar cuántos microchips para mascotas de cada tipo hay que fabricar, con el fin de maximizar el beneficio es:

Maximizar $z=50x+30y$ s.a.

$$\begin{cases} 6x+8y\le 120 \rightarrow \text{Existencias materia prima P} \\ x+3y\le 30 \rightarrow \text{Existencias materia prima G} \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$

Simplificado, resulta:

$$\begin{cases} 3x+4y\le 60 \\ x+3y\le 30 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$



La región factible está limitada por el polígono de vértices $A(0,0)$, $B(20,0)$, $C(12,8)$ y $D(0,10)$, siendo C la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x+4y=60 \\ x+3y=30 \end{cases}$$

Veamos cuál es el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible.

Vértices	$A(0,0)$	$B(20,0)$	C(12, 6)	$D(0,10)$

Valor $z = 50x + 30y$	0	$1000 \leftarrow Máx$	780	300

Debería la empresa solo fabricar 20 microchips del tipo A y así obtendrían un beneficio máximo de 1000€.

Si se incremente a 70€ el beneficio para cada chip del tipo B, entonces la función objetivo nueva es:

$$w = 50x + 70y$$

Por tanto, la región factible no se modifica. Y, veamos cuál es el valor de la función objeto w en dichos vértices:

Vértices	$A(0,0)$	$B(20,0)$	C(12, 6)	$D(0,10)$
Valor $w = 50x + 70y$	0	1000	$1020 \leftarrow Máx$	700

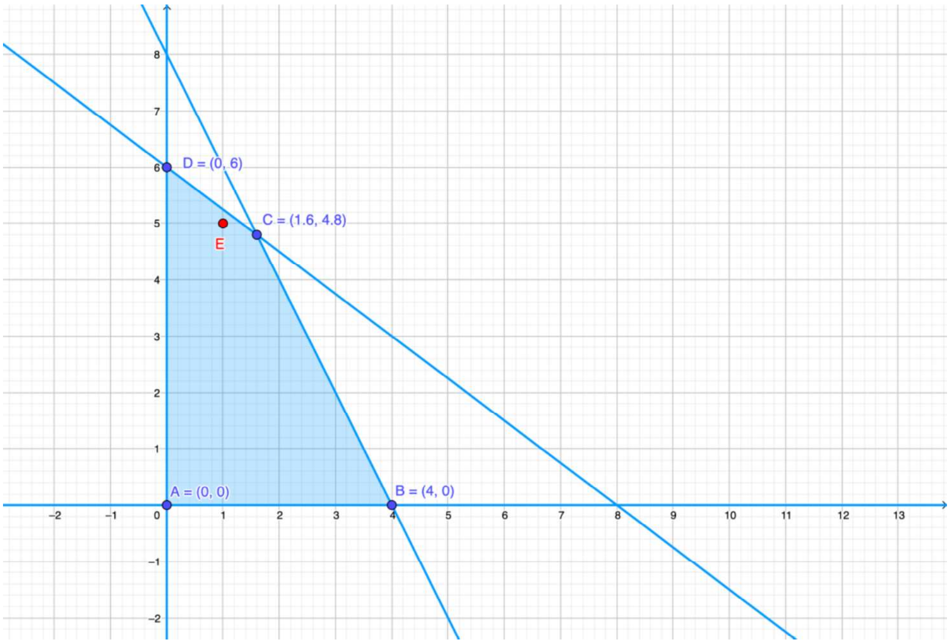
La solución óptima sí cambia pasando a ser una fabricación de 12 microchips del tipo A y 6 microchips del tipo B.

Además, el beneficio máximo también se modifica siendo $w_{máx} = 1020€$

7. Programación lineal entera

22. Halla en qué punto se alcanza el máximo de la función: $z = 4x + 3y$, sobre la región factible limitada por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \le 8 \\ 3x + 4y \le 24 \\ x \ge 0, y \ge 0, x, y \in z \end{cases}$$



La región factible queda delimitada por el polígono de vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C\left(\frac{8}{5},\frac{24}{5}\right)$ y $D(0,6)$.

Vértices	$A(0,0)$	$B(4,0)$	$C\left(\frac{8}{5},\frac{24}{5}\right)$	$D(0,6)$
Valor $z=4x+3y$	0	16	$20{,}8 \leftarrow Máx$	18

El máximo se alcanza en un vértice que no tiene valores enteros. Por tanto, había que encontrar un punto en la región, en valores enteros, y que hagan máxima a la función objetivo.

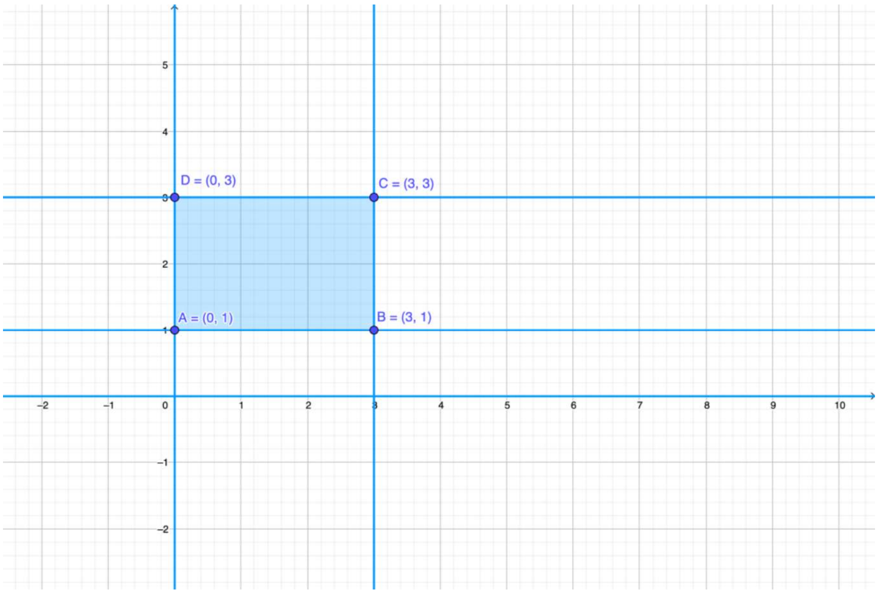
Observando la gráfica podemos comprobar que el máximo se alcanza en el punto $E(1,5)$ con $z_{Máx}=19$.

23. Fabricación de componentes. En una empresa se fabrican cada hora dos tipos de componentes electrónicos, A y B. Debido a la intervención humana, como máximo pueden fabricarse 3 componentes de cada tipo, siendo al menos uno del tipo B. Los precios de venta de cada componente A y B son de 2 y 3 euros, respectivamente. Encuentra el número de componentes de cada tipo que se han de fabricar para maximizar los ingresos por venta.

El enunciado da lugar al siguiente problema de programación lineal, siendo x e y el nº de componentes.

F. Objetivo: Maximizar $z = 2x + 3y$ s.a.

Restricciones: $\begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 3 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in z \end{cases}$



La región factible de este problema está limitada por el rectángulo de vértices $A(0,1)$, $B(3,1)$, $C(3,3)$ y $D(0,3)$.

El valor de la función objetivo en los vértices figura en la siguiente tabla:

Vértices	$A(0,1)$	$B(3,1)$	$C(3,3)$	$D(0,3)$
Valor $z = 2x + 3y$	3	9	$15 \leftarrow Máx$	9

El máximo se alcanza en un vértice en valores enteros y, en consecuencia, se deben fabricar cada hora 3 componentes eléctricos de cada tipo y lograra unos ingresos máximos por venta de 15€

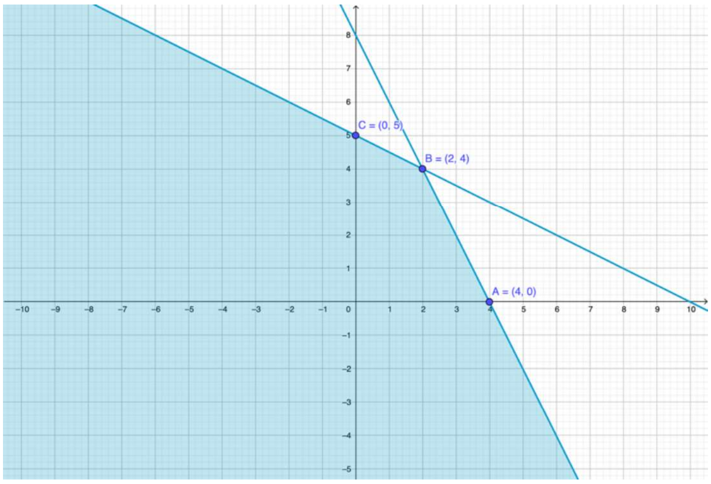
Actividades finales

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

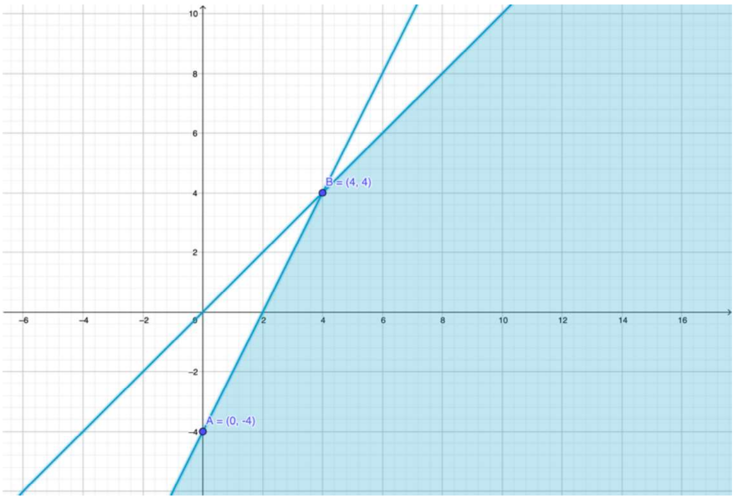
24. Dibuja el recinto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones y halla las coordenadas de los vértices.

$\begin{cases} x+2y\leq 10 \\ 2x+y\leq 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ 2x-y\geq 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y\leq 12 \\ x\leq 4 \\ y\leq 6 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+2y\leq 2 \\ x-y\leq 1 \\ x\leq y \end{cases}$

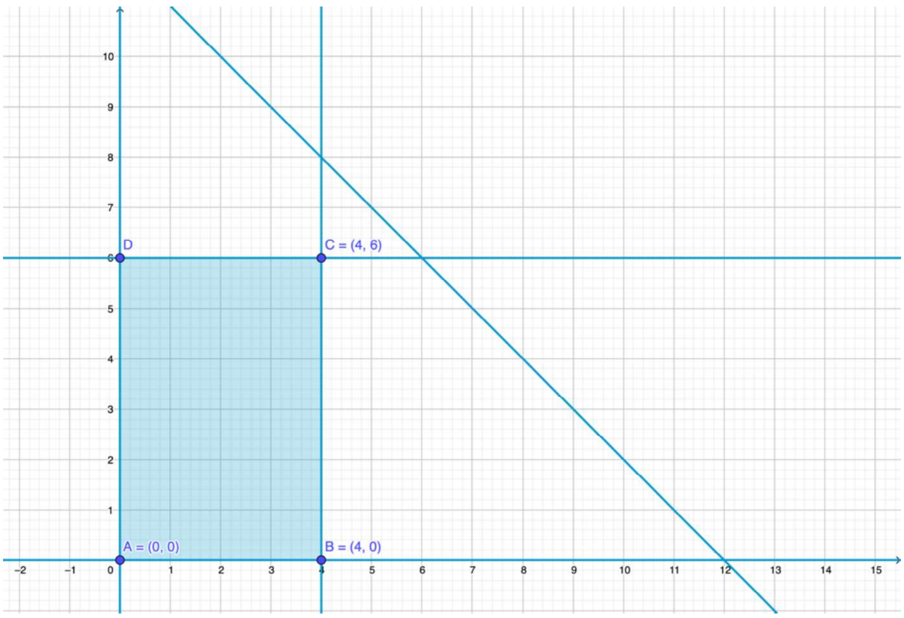
a)



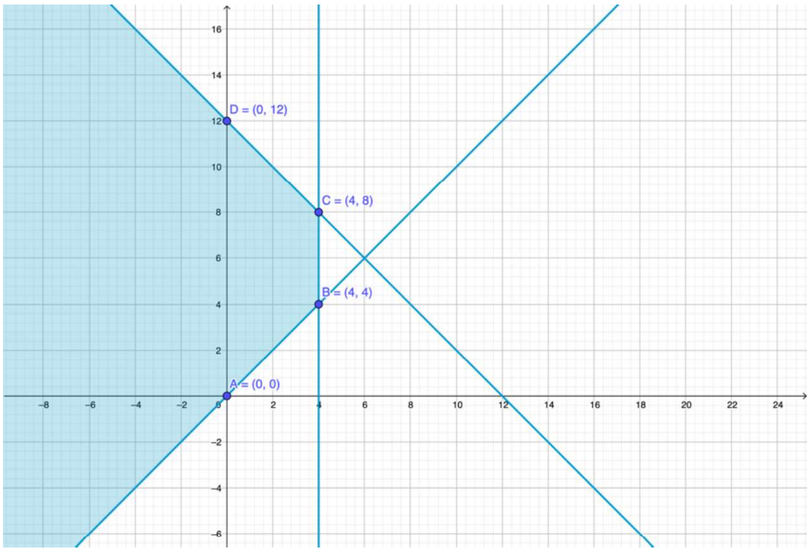
b)



c)



d)



25. Dibuja el recinto solución de los siguientes sistemas de Inecuaciones:

a) $\begin{cases} x+y\le 0 \\ x+y\le 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ 2x-y\ge 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y<0 \\ x+y>3 \end{cases}$

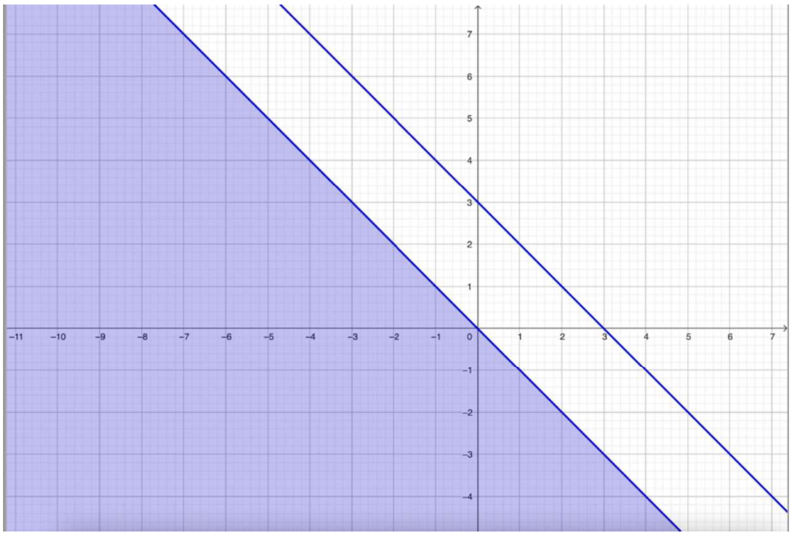
d) $\begin{cases} x+3y\le 3 \\ x+3y\ge 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y\ge 3 \\ 2x+y\ge 4 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-y<4 \\ x+y>1 \\ x\ge 2 \end{cases}$

Solución:

Construimos la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = x + y = 0$	(0, 0)	$x+y\le 0$	$P(1,0): 1\le 0$	No
$r_2 = x + y = 3$	(3, 0) y (0, 3)	$x+y\le 3$	$P(0,0): 0\le 3$	Sí

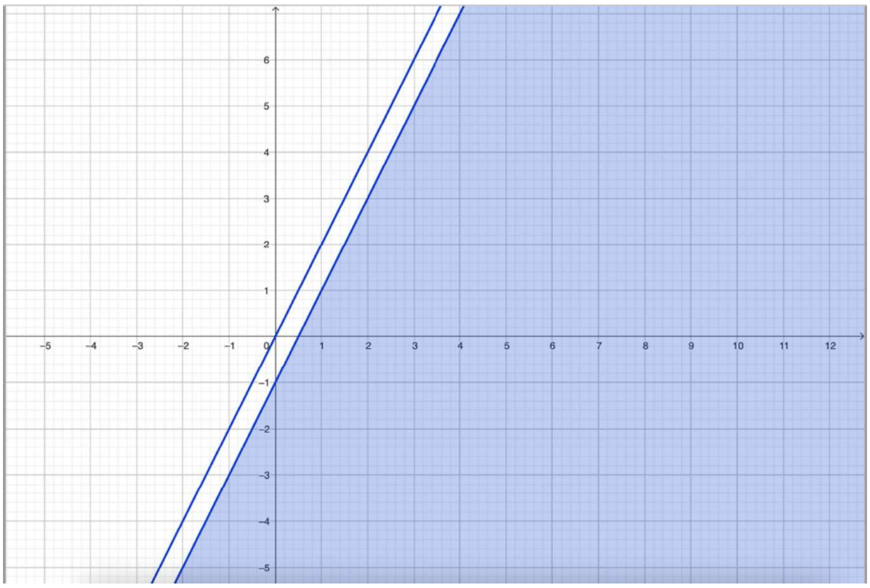
El recinto solución es la región abierta de la figura.



b) Veamos la información de la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = 2x - y = 0$	(0, 0)	$2x - y \geq 0$	$P(1,0): -1 \geq 0$	No
$r_2 = 2x - y = 1$	(1/2, 0) y (0, -1)	$2x - y \geq 1$	$P(0,0): 0 \geq 1$	No

El recinto solución es la región abierta de la figura.



d) Veamos la información de la siguiente tabla:

Ecuación	Ptos. de corte	Inecuación	Pto. de prueba	Conclusión
$r_1 = x + 3y = 3$	(3, 0) y (0, 1)	$x + 3y \leq 3$	$0 \leq 3$	Sí
$r_2 = x + 3y = 2$	(2, 0) y (0, 3/2)	$x + 3y \geq 2$	$0 \geq 2$	No