$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = -m^2 + m + m - m^2 = -2m^2 + 2m$$

$$m^2 + m + m - m^2 = 2m(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$$

Por tanto:

Si $m \neq 0 \; y \; m \neq 1, rg(A) = 3$, luego es un SCD, es decir, el sistema solo tiene la solución trivial (x, y, z) = (0, 0, 0).

Si m = 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Luego rg(A) = 2 < 3, es decir, tenemos un SCI, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Si m = 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; por\ ejemplo \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq$$

Luego rg(A) = 2 < 3, es decir, tenemos un SCI, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para m = 1, como hemos considerado un determinante que involucra a las dos primeras ecuaciones, entonces el sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Haciendo z = λ, entonces x = -λ, y = 0. La solución es (x, y, z) = $(-\lambda, \; 0, \; \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Una solución distinta de la trivial es, por ejemplo, (x, y, z) = (-1, 0, 1), obtenida para λ = 1.

Regla de Cramer

53. Resuelve, mediante la regla de Cramer, los sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y - z = -8 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 4y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por otro lado, el sistema tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas. En consecuencia, sí podemos aplicar la regla de Cramer. Así:so

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&1&1\\8&1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-14}{-2}=7,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&8&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-8}{-2}=4,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&1&8\\2&-1&-1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{22}{-2}=-11$$

La solución es: $(x,y,z)=(7,4,-11)$.

b) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&4&-1\\3&-1&2\end{vmatrix}=16\neq 0$$

Como el sistema, además, tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas es un sistema de Cramer. Así:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&-3&1\\0&4&-1\\0&-1&2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{7}{16},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\3&0&2\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-5}{16},\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&4&0\\3&-1&0\end{vmatrix}}{|A|}$$

La solución es: $(x,y,z)=\left(\frac{7}{16},\frac{-5}{16},\frac{-13}{16}\right)$.

54. Utiliza si es posible la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}2x-y=4\\4x-2y=6\end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases}6x+2y-z=4\\2x+y+3z=0\end{cases}$

a) El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1\\4&-2\end{vmatrix}=0.$$

Por tanto, no es un sistema de Cramer.

b) Podemos escribir el sistema en función de Z. Así:

$\begin{cases}6x+2y=4+\ \ z\\2x+\ \ y=\ \ -3z\end{cases}$, Entonces,

$$\begin{vmatrix}6&2\\2&1\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Luego,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z & 2 \\ -3z & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4+z+6z}{2} = \frac{4+7z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4+z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{2} = \frac{-18z-8-2z}{2} = \frac{-20z-8}{2} = -10z-4$$

Haciendo $z = \lambda$, entonces $x = \frac{4+7\lambda}{2}$ e $y = -10\lambda - 4$.

La solución es: $(x, y, z) = \left(\frac{4+7\lambda}{2}, -10\lambda - 4, \lambda\right)$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Teorema de Rouché-Fröbenius. Discusión de sistemas dependientes de un parámetro

55. El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas es 1. ¿Qué valores puede tomar el rango de la matriz ampliada? ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

Si el rango de la matriz de coeficientes es 1, entonces el rango de la matriz ampliada puede ser 1 o 2.

En el caso que $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) = 1 < 3$, el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependiendo de 2 parámetros.

Sin embargo, si $\text{rg}(A^*) = 2 \neq \text{rg}(A) = 1$, el sistema incompatible y, por tanto, carece de solución.

56. Discute, según los valores de *m*, las soluciones del sistema y resuélvelo para *m* = 1:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & m-1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 2F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-m \end{array}\right)$$

Discusión:

- Si $m = 1$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.
- Si $m \neq 1$, entonces $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.

Para $m = 1$, el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2y \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 0$$

Si hacemos $z = \lambda$, $x = 1 + \lambda$

La solución es: $(x, y, z) = (\lambda + 1, 0, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

57. Discute, según los valores del parámetro *k*, los sistemas:

a) $\begin{cases} 2kx - y = 2 \\ 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + ky + z = 8 \\ kx + y + kz = 10 \end{cases}$

a) Como la matriz ampliada es cuadrada, calculamos su determinante. Así:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2k & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4k - 6$$

$$|A^*| = 0 \Rightarrow -4k - 6 = 0 \Rightarrow k = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

- Si $k \neq -\frac{3}{2}$, $rg(A^*) = 3$ y rg(A) = 2, por tanto, el sistema es incompatible.
- Si $k = -\frac{3}{2}$, $\text{rg}(A^*) = 2$ y *rg*(A) = 1. También el sistema es incompatible.

En resumen, el sistema propuesto es incompatible para todo $k \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = 0,\ \forall k \in \mathbb{R}$

Utilizamos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 & 8 \\ k & 1 & k & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_2 - KF_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 & 6 \\ 0 & k+1 & 0 & 10-2k \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & k+1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4-2k \end{array}\right)$$

- Si *k* = -1, entonces $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es incompatible.
- Si *k* = 2, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

58. Se considera el siguiente sistema: $\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$

a) **Discútelo según los diversos valores del parámetro λ.**

b) **Resuélvelo en aquellos casos en que sea compatible.**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - (\lambda-1)F_2]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -2\lambda^2+2\lambda \end{array}\right)$

Entonces $\text{rg}(A) = 2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$-2\lambda^2 + 2\lambda = 2\lambda(-\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, entonces $\text{rg}(A^*) = 3$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 0$, el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Si z = t, entonces $y = t$, $x = -t$.

La solución es: $(x,y,z) = (-t,t,t)$, $t \in \mathbb{R}$

- Para λ = 1, el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}$$

- Si $z = t$, entonces $y = t + 1$ y $x = -2t$

  La solución es: $(x,y,z) = (-zt,\ t+1,\ t)$, $t \in \mathbb{R}$

59. ¿Para qué valores del parámetro *a* el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única? Resuélvelo para *a* = 0.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 9-10 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9-8 & 0 \end{array}\right)$

$a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$

- Si $a \neq 8$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinante (solución única).
- Si a = 8, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminante.

Para a = 0, el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x + y + 2z = \ \ 2 \\ -3y - \ \ z = -2 \\ \qquad -8z = \ \ 0 \end{cases}$$

cuya solución es $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.

60. Resuelve el siguiente sistema para los valores del parámetro *a* cuando sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 2 \\ x + ay = 1 \\ y - az = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to 2F_2 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 2 \\ 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - aF_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & 0 \end{array}\right)$$

$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ y $a = 1$.

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado (sol— única).
- Si a = -1 o a = 1, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

Resolveremos, pues, el sistema para a = -1 y a = 1.

- Para a = -1, el sistema equivalente obtenido es:

  $$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ \qquad y + z = 0 \end{cases}$$

  Si $z = \lambda$, entonces $y = -1$ y $x = -\lambda + 1$.

  La solución es: $(x, y, z) = (-\lambda + 1, -\lambda, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

- Para a = 1, el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ \quad y-z=0 \end{cases}$$

Haciendo $z=\lambda$, entonces $y=\lambda$ y $x=-\lambda+1$, luego la solución es:

$(x,y,z)=(-\lambda+1,\lambda,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$.

61. **Encuentra los valores del parámetro *k* para los cuales no tiene solución el sistema:**
$$\begin{cases} (1+2k)x+5y=7 \\ (2+k)x+4y=8 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+2k & 5 \\ 2+k & 4 \end{vmatrix}=-6+k$$
$$|A|=0\Rightarrow -6+3k=0\Rightarrow k=2$$

- Si $k\neq 2$, entonces $|A|\neq 0$ y $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2$ y, por tanto, el sistema es compatible determinado.
- Si k = 2, entonces $|A|=0$ y, por ejemplo, $|5|\neq 0$ y rg(A) = 1.

  Por otro lado,

  $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}\neq 0$ y rg(A^*) = 2

  Luego, $\text{rg}(A)=1\neq\text{rg}(A^*)=2$ y el sistema no tiene solución.

Por tanto, el sistema carece de solución si k = 2.

62. **Sea el sistema:** $\begin{cases} -x+\lambda y+2z=\lambda \\ 2x+\lambda y-z=2 \\ \lambda x-y+2z=\lambda \end{cases}$

a) **Discute su compatibilidad según los valores de λ.**

b) **Resuélvelo para λ = −1.**

c) **Haz lo mismo para λ = 2.**

a) Como hay que resolverlo para los valores de λ, hallaremos los rangos y sistemas equivalentes mediante matrices.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3+\lambda F_1]{F_2\to F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 0 & 3\lambda & 3 & 2\lambda+2 \\ 0 & \lambda^2-1 & 2\lambda+2 & \lambda^2+\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{C_2\to C_3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 3 & 3\lambda & 2\lambda+2 \\ 0 & 2\lambda+2 & \lambda^2-1 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to 3F_3-(2\lambda+2)F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda & \lambda \\ 0 & 3 & 3\lambda & 2\lambda+2 \\ 0 & 0 & -3(\lambda+1)^2 & -(\lambda+1)(\lambda+4) \end{pmatrix}$$

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 1$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- Si $\lambda = -1$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = -1$, el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} -x+2z-\ \ y=-1 \\ \quad\ \ 3z-3y=\ \ 0 \end{cases}$$

Haciendo $z = t$, entonces $y = t$ y $x = t + 1$.

La solución es: $(x,y,z)=(t+1,t,t),\ \ t\in\mathbb{R}$

c) Para $\lambda = 2$, el sistema equivalente es:

$$\begin{cases} -x+2z+2y=2 \\ \quad\ \ 3z+6y=6 \end{cases}$$

Haciendo $z = t$, entonces $y=-\frac{1}{2}t+1$, $x = t$.

La solución es: $(x,y,z)=\left(t,-\frac{1}{2}t+1,t\right),\ \ t\in\mathbb{R}$

63. Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ y resuelve el sistema en los casos de compatibilidad.

$$\begin{cases} x+y+\lambda z=\lambda^2 \\ \quad\ \ y-z=\lambda \\ x+\lambda y+z=\lambda \end{cases}$$

Para hallar los rangos utilizaremos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3-F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3-(\lambda-1)F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -2\lambda^2+2\lambda \end{array}\right)$$

$-2\lambda^2+2\lambda=-2\lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda=0$ y $\lambda=1$.

Entonces:

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$ y el sistema es incompatible.
- Si $\lambda = 0$ el sistema resultante es homogéneo con $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$ y, por tanto, es un sistema compatible indeterminado.
- Si $\lambda = 1$, $\text{rg}(A) = rg(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.
- Resolución para $\lambda = 0$

$$\begin{cases} x + y \quad\;\; = 0 \\ \quad\;\; y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (-t, t, t)$$

$t \in \mathbb{R}$.

- Resolución para $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad\;\; y - z = 1 \end{cases}$$

$(x, y, z) = (-2t, t + 1, t)$,

$t \in \mathbb{R}$

64. Determina el valor de *k* para que el siguiente sistema homogéneo tenga solución distinta de la trivial.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ kx - 14y + 15z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ k & -14 & 15 \end{vmatrix} = 4k - 20$$

El sistema tendrá solución distinta de la trivial si rg(A) < 3, es decir, si $|A| = 0$, o lo que es equivalente, $4k - 20 = 0 \Rightarrow k = 5$

65. Estudia las soluciones según los distintos valores del parámetro *k* y resuélvelo en el caso compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + k^2 z = k \end{cases}$$

Como hay que resolverlo en el caso compatible indeterminado estudiaremos los rangos mediante las matrices.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & k^2 & k \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k^2-3 & k+1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \end{array}\right)$$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1$ y $k = 1$

$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1.$

Entonces:

- Si $k \neq -1$ y $k \neq 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado (sol. única).
- Si $k = 1$, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.
- Si $k = -1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

Para *k* = -1. El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ \quad\ \ y - 2z = \ 0 \end{cases}$$

Haciendo $z = \lambda$, entonces $y = 2\lambda$ y $x = -7\lambda - 1$.

La solución es: $(x, y, z) = (-7\lambda - 1, 2\lambda, \lambda)$,

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

66. **Estudia las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de *m:***

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 3y = 1 \\ 2x + y = m \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} mx + 3y = 2 \\ 3x + 2y = m \\ 2x + my = 3 \end{cases}$

a) La matriz ampliada es cuadrada y, por tanto, calculamos el valor de su determinante:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 5m + 24.$$

$$|A^*| = 0 \Rightarrow -5m + 24 = 0 \Rightarrow m = \frac{24}{5}.$$

- Si $m = \frac{24}{5}$, entonces $rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.
- Si $m = \frac{24}{5}$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es compatible determinado con solución $(x, y) = \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

b) De forma análoga,

$$|A^*| = \begin{vmatrix} m & 3 & 2 \\ 3 & 2 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = -m^3 + 18m - 35$$

$$|A^*| = 0 \Rightarrow -m^3 + 18m - 35 = 0 \Rightarrow m = -5$$

- Si $m \neq -5$, entonces $\text{rg}(A) 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.
- Si m = -5, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$ y el sistema es compatible determinado con solución $(x, y) = (-1, -1)$

67. Estudia sus soluciones según los valores del parámetro *k* y resuélvelo en los casos en que sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y + 3z = k} \\ \boldsymbol{ky - 2z = -2} \\ \boldsymbol{x + (k-1)y + (k+3)z = k} \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k-1 & k+3 \end{vmatrix} = k^2 + 2k$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^2 + 2k = k(k+2) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ y } k = -2$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- Si k = 0, el sistema es:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -2z = -2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

En un sistema compatible indeterminado con solución:

$(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

- Si k = -2, el sistema es:

$$\begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ -2y - 2z = -2 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ y + z = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

$\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible.

68. **Sea** $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right)$ **la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.**

a) **Discute el sistema según los valores del parámetro *a*.**

b) **Para *a* = 1, encuentra la solución.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$

$|A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ (doble) y $a = -2$

Luego,

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, $rg(A) = rg(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado (una sola solución).
- Si a = 1,

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right), \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

y $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$

Por tanto, $rg(A) = 2 \neq rg(A^+) = 3$ y el sistema es incompatible.

b) Para a = 1, el sistema equivalente es la ecuación $x + y + z = 1$.

La solución es: $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$,

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

69. **Dado el sistema de ecuaciones homogéneo:** $\begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ 2x + az = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$

a) **Determina los valores del parámetro *a* para que el sistema tenga solo la solución trivial.**

b) **Calcula los valores del parámetro *a* para que el sistema sea compatible indeterminado y resuélvelo.**

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 + 2F_1]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & a+6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & a+6 \\ 0 & 0 & a+10 \end{pmatrix}$$

$a+10=0 \Rightarrow a=-10$

a) El sistema solo tendrá la solución trivial si rg(A) = 3, es decir, si $a \neq -10$.

b) Por otro lado, el sistema será compatible indeterminado si rg(A)<3. Por tanto, si a = -10 la matriz equivalente tendrá dos filas no nulas y rg(A) = 2 < 3. El sistema equivalente para a = 10 es:

$\begin{cases} -x - \ y + 3z = 0 \\ \quad -2y - 4z = 0 \end{cases}$ Si $z=\lambda$, entonces $y=-2\lambda$ y $x=5\lambda$.

La solución es: $(x,y,z)=(5\lambda-2\lambda,\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

70. Halla los valores de *a* y *b* para que el sistema $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x+3y=b \end{cases}$ sea:

***a)* Incompatible.**

***b)* Compatible determinado.**

***c)* Compatible indeterminado.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & b \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 3-2a & b-2 \end{array}\right)$$

a) El sistema será incompatible si $rg(A) \neq rg(A^*)$. Para $a = 3/2$, rg(A) = 1 y para $a \neq 3/2$, rg(A) = 2, Por otro lado, si $a = 3/2$ y $b \neq 2$, entonces

$rg(A)=1 \neq rg(A^*)=2$

b) El sistema será compatible determinado sin $rg(A)=rg(A^*)=2$. Para ello, basta que $a \neq 3/2$ y $b \in \mathbb{R}$.

c) Por último, el sistema será compatible indeterminado si $rg(A)=rg(A^*)<2$, es decir, $rg(A)=rg(A^*)=1<2$. Para que esto ocurra $a = 3/2$ y b = 2.

En resumen:

- Si $a = 3/2$ y $b \neq 2,\ \text{rg}(A)=1 \neq \text{rg}(A^*)=2 \Rightarrow \text{SI}$
- Si $a \neq 3/2$ y $b \in \mathbb{R}$, $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)=2 \Rightarrow \text{SCD}$

- Si a $= a = 3/2$ y $b = 2$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 1 < 2 \Rightarrow$ SCI

71. **Sean la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y el sistema de ecuaciones lineales** $(A^2 - 3A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$**. Estudia si este tiene solución y, en caso afirmativo, resuélvelo.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Como $rg(M) = rg(M^*) = 3$, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

El sistema equivalente obtenido es:

$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ y - 2z = 1 \\ -5z = 5 \end{cases}$$ que tiene por solución:

$$(x, y, z) = (0, -1, -1)$$

72. **Sea el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

a) **Estúdialo para los distintos valores del parámetro *k*.**

b) **Resuelve el caso en que tiene infinitas soluciones.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2k^2 - 5k + 2$

$|A| = 0 \Rightarrow 2k^2 - 5 + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ y $k = 2$.

- Si $k \neq \frac{1}{2}$ y $k \neq 2$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.
- Si $k = \frac{1}{2}$, por ejemplo,

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego, rg($A$) = 2.

  $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Luego, $\text{rg}(A^*) = 3$.

  Por tanto, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.
- Si k = 2, por ejemplo,

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego, rg($A$)=2

  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

  Como los dos determinantes de orden 3 que contienen a ese menor de orden 2 sin nulos, entonces $rg(A^*) = 2$. Por tanto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ y el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

b) Para k = 2, el sistema tiene infinitas soluciones. Como el determinante del menor que no es nulo implica a la segunda y tercera ecuación, trabajaremos en este sistema. Así:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + z = 2 \\ \ \ x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, resulta:

$$3x - y = 5$$

Haciendo $x = \lambda$, entonces $y = 3\lambda - 5$.

Por ejemplo, en la primera ecuación:

$$2\lambda + 3\lambda - 5 + z = 2 \Rightarrow z = -5\lambda + 7$$

La solución es: $(x, y, z) = (\lambda, 3\lambda - 5, -5\lambda + 7)$,

$$\lambda \in \mathbb{R}.$$

73. **Considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente, dependiente de los parámetros *a* y *b*:**

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=1 \\ 4x+y-2z=3 \\ 2x-3y+az=b \end{cases}$$

Determina para qué los valores de los parámetros *a* y *b* el sistema tiene infinitas soluciones y encuentra una solución general de las mismas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 3F_3 - 2F_1]{F_2 \to 3F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 14 & 5 \\ 0 & -13 & 3a+10 & 3b-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 5F_3 - 13F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & 15a-132 & 15b-75 \end{array}\right)$$

$$15a-132=0 \Rightarrow a=\frac{44}{5}$$

$$15b-75=0 \Rightarrow b=5$$

- Si $a \neq \frac{44}{5}$ y $b \in \mathbb{R}$, $rg(A)=rg(A^*)=3$ y el sistema es compatible determinado (sol. única).
- Si $a=\frac{44}{5}$ y b = 5, $rg(A)=rg(A^*)=2<3$ y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $a=\frac{44}{5}$ y $b \neq 5$, $rg(A)=2 \neq rg(A^*)=3$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a=\frac{44}{5}$ y $b = 5$.

El sistema equivalente obtenido para estos valores es:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=1 \\ -5y+14z=5 \end{cases}$$

Si $z=\lambda$, entonces $y=\frac{14}{5}\lambda-1$ y $x=-\frac{1}{5}\lambda+1$.

Así, pues, una expresión general de las infinitas soluciones es:

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{5}\lambda+1, \frac{14}{5}\lambda-1, \lambda\right),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

74. **Halla tres enteros positivos que cumplan estas condiciones:**

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ x+5y+10z=44 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 44 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 35 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=\ \ 9 \\ 4y+9z=35 \end{array}\right\}$$

Haciendo, $z=\lambda$, entonces $y=\dfrac{-9\lambda+35}{4}$ y $x=\dfrac{5\lambda+1}{4}$.

Luego,

$$(x,y,z)=\left(\frac{5\lambda+1}{4},\frac{-9\lambda+35}{4},\lambda\right),\lambda\in\mathbb{R}$$

Pero la solución tiene que ser números enteros positivos, entonces:

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$ y, además, $x,y,z\in Z$.

Así:

$$\begin{cases} \dfrac{5\lambda+1}{4}\geq 0 \Rightarrow 5\lambda+1\geq 0 \Rightarrow \lambda\geq -1/5 \\ \dfrac{-9\lambda+35}{4}\geq 0 \Rightarrow -9\lambda+35\geq 0 \Rightarrow \lambda\leq 35/9 \\ \lambda\geq 0 \end{cases}$$

Luego, $0\leq\lambda\leq 35/9$ y $\lambda\in Z$.

Es decir, $\lambda=0,\ \lambda=1,\ \lambda=2$ o $\lambda=3$.

- Si $\lambda=0$, entonces $x=1/4,\ldots\leftarrow$ no sirve.
- Si $\lambda=1$, entonces $x=3/2,\ldots\leftarrow$ no sirve.
- Si $\lambda=2$, entonces $x=11/4,\ldots\leftarrow$ no sirve.
- Si $\lambda=3$, entonces $x=4,\ y=2,\ z=3\leftarrow$ sí es solución.

Por tanto, los tres números buscados son:

$$x = 4,\ y = 2,\ z = 3.$$

75. Ajusta a los puntos (2, 5), (3, 10) y (4, −3) un polinomio de tercer grado del tipo $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

Imponiendo al polinomio que pase por cada uno de los puntos, resulta el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{array}{l} (2,5) \to \\ (3,10) \to \\ (4,-3) \to \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5 = 8 + 4b + 2c + d \\ 10 = 27 + 9b + 3c + d \\ -3 = 64 + 16b + 4c + d \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4b + 2c + d = -3 \\ 9b + 3c + d = -17 \\ 165b + 4c + d = -67 \end{array} \right.$$

Lo resolveremos por el método de Gauss y, por comodidad, intercambiaremos las columnas primera y tercera. Así:

$$\begin{array}{ccc} d & c & b \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 9 & -17 \\ 1 & 4 & 16 & -67 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 12 & -64 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & -36 \end{array} \right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\left\{ \begin{array}{l} d + 2c + 4b = -3 \\ \qquad c + 5b = -14 \end{array} \right. \Rightarrow b = -18,\ c = 76,\ d = -83.$$

Por tanto, el polinomio que se ajusta a los puntos dados es:

$$P(x) = x^3 - 18x^2 + 76x - 83$$

76. Discute, según los valores de *a* y *b*, las soluciones del siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + 3y = b \\ 4x + 2y = 8 \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & | & b \\ 4 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} = A^*$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 12$$

$$|A| = 0, luego\ 2a - 12 = 0, a = 6$$

$$\begin{vmatrix} 3 & b \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 2b$$

$$24 - 2b = 0, b = 12$$

Discusión:

Si a = 6 y b = 12, rg(A) = rg(A*) = 1 < 2, luego el sistema es compatible indeterminado.

Haciendo x = $\lambda, y = -2\lambda + 4, \lambda \in \mathbb{R}$.

Si $a \neq 6, b \in \mathbb{R}: rg(A) = rg(A*) = 2$.

El sistema es compatible determinado.

Solución: $x = \frac{b-12}{a-6}, y = \frac{4a-2b}{a-6}$

77. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los diversos valores del parámetro *m*.

b) Resuélvelo para *m* = 0.

a)

$$(A|A^*)\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m + \dfrac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$|A| = 4 - 15m - 4 - 6m^2 = -6m^2 - 15m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -6m^2 - 15m = -3m\,(2m + 5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = \frac{-5}{2}$$

Si $m \neq 0 \; y \; m \neq -\frac{5}{2}$, rg(A) = rg(A*) = 3, luego el sistema es S. C. D.

Si m = 0, por ejemplo:

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, luego rg(A) = 2

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2/5 \end{vmatrix} = 0$, luego rg(A*) = 2

Por tanto, rg(A) = rg(A*) = 2 < 3, así que el sistema es compatible indeterminado.

Si $\boldsymbol{m} \neq \frac{-2}{5}$, por ejemplo:

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$, luego rg(A) = 2

$\begin{vmatrix} -5/2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -21/10 \end{vmatrix} = \frac{21}{2} - 2 = \frac{17}{2} \neq \mathbf{0}$, luego rg(A*) = 3

Como rg(A) = 2 ≠ rg(A*) = 3, el sistema es incompatible.

b) Para m = 0,

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Haciendo $y = \lambda, z = 2\lambda - 1; 5x - 4\lambda + 4\lambda - 2 = 0$, luego $x = \frac{2}{5}$.

Solución: $x = \frac{2}{5}, y = \lambda, z = 2\lambda - 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

Aplicaciones

78. Mezclas. En un laboratorio químico hay tres tubos de ácido sulfúrico. Uno contiene una solución del 15 % de este ácido, el segundo otra del 25 %, y el tercero otra del 50 %. ¿Cuántos litros de cada solución habrá que mezclar para obtener 100 litros de solución de una concentración del 40 % de ácido sulfúrico?

Designemos por *x, y, z* los litros de la solución que contienen el 15%, 25% y 50%, respectivamente. Así, tenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0,5x + 0,25y + 0,50z = 0,40(x+y+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & -7 & -500 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido es:

$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2y + 7z = 500 \end{cases}$ El sistema tiene infinitas soluciones.

Haciendo $z = \lambda$, entonces $y = \frac{-7}{2}\lambda + 250$ y $x = \frac{5}{2}\lambda - 150$.

La solución es: $(x,y,z) = \left(\frac{5}{2}\lambda - 150, \frac{-7}{2}\lambda + 250, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}$.

Como la cantidad de litros no puede ser negativa, entonces:

$$\begin{cases} \frac{-7}{2}\lambda + 250 \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{500}{7} \\ \frac{5}{2}\lambda - 150 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 6 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Luego, $6 \leq \lambda \leq \frac{500}{7}$.

79. Alquiler de coches. Una empresa de alquiler de coches dispone de tres tipos de vehículos, *A, B* y *C.* El coste por día de cada coche, según el tipo, es de 30, 40 y 50 €, respectivamente. Un día determinado se han alquilado 60 coches y la empresa ha ingresado un total de 2 160 €. ¿Cuántos vehículos de cada tipo se alquilaron ese día?

Sean x, y, z el número de vehículos alquilados ese día de los tipos A, B y C, respectivamente. Obviamente, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ y, además, $x, y, z \in Z$.

El enunciado da lugar al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 30x + 40y + 50z = 2160 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 3 & 4 & 5 & 216 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 1 & 2 & 36 \end{array}\right)$$

Luego,

$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ y + 2z = 36 \end{cases}$. Haremos $z = \lambda$, entonces $y = -2\lambda + 36$, $x = \lambda + 24$.

$(x,y,z)=(\lambda+24,-2\lambda+36,\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Pero,

$$\left.\begin{array}{r}\lambda+24\geq 0\\ -2\lambda+36\geq 0\\ \lambda\geq 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow\lambda\geq -24\\ \Rightarrow\lambda\leq 18\\ \Rightarrow\lambda\geq 0\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\}\Rightarrow \begin{array}{r}0\leq\lambda\leq 18\\ \lambda\in z\end{array}$$

Por tanto, habrá 19 posibles soluciones que se dan en la tabla siguiente:

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
y	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

λ	15	16	17	18
x	39	40	41	42
y	6	4	2	0
z	15	16	17	18

80. Fábrica de camisetas. La fábrica de una empresa produce tres tipos de camisetas. Cada una de ellas pasa por los departamentos de diseño, confección y embalaje. El número de horas de trabajo que requiere cada tipo de camiseta en los distintos departamentos y la disponibilidad horaria máxima por semana de cada departamento vienen reflejadas en la siguiente tabla:

Tipos de camiseta/ departamentos	*A*	*B*	*C*	Horas de trabajo semanal
Diseño	0,3	0,4	0,4	1770
Confección	0,2	0,5	0,3	1730
Embalaje	0,1	0,2	0,2	810

¿Cuántas camisetas de cada tipo se deben producir cada semana para que la planta opere a plena capacidad?

Designemos por *x, y, z* el número de camisetas de los tipos *A, B, C,* respectivamente, que debe producir semanalmente esta fábrica.

Con los datos de la tabla podemos construir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0,3x+0,4y+0,4z=1770 & \leftarrow \text{Dpto. Diseño (Horas)} \\ 0,2x+0,5y+0,3z=1730 & \leftarrow \text{Dpto. Confección (Horas)} \\ 0,1x+0,2y+0,2z=810 & \leftarrow \text{Dpto. Embalaje (Horas)} \end{cases}$$

$$x\geq 0,\;\; y\geq 0,\;\; z\geq 0,\;\;\; x,y,z\in Z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4y+4z=17700 \\ 2x+5y+3z=17300 \\ \;\;x+2y+2z=8100 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 4 & 17700 \\ 2 & 5 & 3 & 17300 \\ 1 & 2 & 2 & 8100 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 8100 \\ 2 & 5 & 3 & 17300 \\ 3 & 4 & 4 & 17700 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 8100 \\ 0 & 1 & -1 & 1100 \\ 0 & -2 & -2 & -6600 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 8100 \\ 0 & 1 & -1 & 1100 \\ 0 & 0 & -4 & -4400 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente obtenido:

$$\begin{cases} x+2y+2z=8100 \\ \qquad y-\;\; z=1100 \\ \qquad\quad 4z=4400 \end{cases}$$

que tiene por solución:

$$x=1500,\quad y=2200,\quad z=1100$$

Deberá, pues, producir 1500 camisetas del tipo *A*, 2200 del tipo *B* y 1100 del *C*.

81. Plantas de fabricación. Una empresa fabrica ordenadores portátiles, tabletas y teléfonos móviles. Dispone para su fabricación de tres plantas, ubicadas en Tarragona, Vitoria y Málaga. El número de unidades de cada producto que se fabrica a diario en cada planta se refleja en la siguiente tabla:

Productos/Plantas	Tarragona	Vitoria	Málaga
Ordenadores	30	20	25
Tabletas	16	35	14
Móviles	20	30	25

Si la empresa tiene un pedido de 1665 ordenadores, 1440 tabletas y 1685 móviles, ¿cuántos días de producción necesita cada planta para cumplir ese pedido?

Sean x, y, z el número de días de producción en las plantas de Tarragona, Vitoria y Málaga, respectivamente $(x, y, z \geq 0,\ \ x, y, z \in Z)$.

A partir de la tabla y con los datos del pedido diario tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 30x + 20y + 25z = 1665 \leftarrow \text{Ordenadores} \\ 16x + 35y + 14z = 1440 \leftarrow \text{Tabletas} \\ 20x + 30y + 25z = 1685 \leftarrow \text{Móviles} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + \ 4y + \ 5z = 333 \\ 46x + 35y + 14z = 1440 \\ 4x + \ 6y + \ 5z = 337 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 333 \\ 16 & 35 & 14 & 1440 \\ 4 & 6 & 5 & 337 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 3F_3 - 2F_1]{F_2 \to 3F_2 - 8F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 333 \\ 0 & 73 & 2 & 1656 \\ 0 & 10 & 5 & 345 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 73F_3 - 10F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 333 \\ 0 & 73 & 2 & 1656 \\ 0 & 0 & 345 & 8625 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 333 \\ \quad 73y + 2z = 1656 \\ \qquad 345z = 8625 \end{cases} \Rightarrow x = 250,\ y = 22,\ z = 25$$

Deberá producir 20 días en Tarragona, 22 días en Vitoria y 25 días en Málaga para cumplir el pedido.

82. Aviones. Una compañía aérea ha encargado una flota de 20 aviones con una capacidad total de 5964 plazas. Los tipos de aviones son: Boeing 787, con una capacidad de 323 plazas, Airbus 330-900, con 287, y Airbus 350, con 280 plazas. ¿Cuántos aviones de cada tipo deberá encargar la compañía?

Designemos por *x, y, z* el número de aviones Boeing 787, Airbus 330-900 y Airbus 350, respectivamente, encargados por la compañía. Así:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \qquad \leftarrow \text{Total de aviones} \\ 323x + 287y + 280z = 5964 \leftarrow \text{Total de plazas} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 323 & 287 & 280 & 5964 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 3F_3 - 2F_1]{F_2 \to 3F_2 - 8F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -36 & -43 & -496 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} x + \ y + \ \ z = 20 \\ \quad 36y + 43z = 496 \end{cases}$$

Haciendo $z = \lambda$, entonces $y = \dfrac{496 - 43\lambda}{36}$ y $x = \dfrac{22y + 7\lambda}{36}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obviamente, $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ y, además, $x, y, z \in Z$.

Luego,

$$\left\{\begin{array}{l} 496-43\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \dfrac{496}{43} \\ 224+\quad 7\lambda \geq 0 \Rightarrow \quad \geq 0 \end{array}\right. ,\ 0 \leq \lambda \leq \frac{496}{43}.$$

λ	z	x	y	
0	0	–	–	No enteros
1	1	–	–	No enteros
2	2	–	–	No enteros
3	3	–	–	No enteros
4	4	7	9	–
5	5	–	–	No enteros
6	6	–	–	No enteros
7	7	–	–	No enteros
8	8	–	–	No enteros
9	9	–	–	No enteros
10	10	–	–	No enteros
11	11	–	–	No enteros

Por tanto, deberá encargar 7 aviones Boeing 787, 9 Airbus 330-900 y 4 Airbus 350.

83. Nutrición. Un nutricionista debe preparar una dieta especial que contenga calcio, hierro y vitamina A. Más concretamente, 400 unidades de calcio, 180 de hierro y 240 de vitamina A. El número de unidades por kg de cada ingrediente para cada uno de los alimentos viene dado en la tabla. ¿Cuántas unidades de cada alimento se deben utilizar para cumplir los requisitos de la dieta?

	A	***B***	***C***
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

Sean *A, B, C* el número de unidades de cada alimento *A, B, C,* respectivamente. Así el enunciado da lugar al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 30A+10B+20C=400 \leftarrow \text{Unidades de calcio} \\ 10A+10B+20C=180 \leftarrow \text{Unidades de hierro} \\ 10A+30B+20C=240 \leftarrow \text{Unidades de vitamina A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+B+2C=40 \\ A+B+2C=18 \\ A+3B+2C=24 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & 2 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to 3F_3 - F_1]{F_2 \to 3F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 8 & 4 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -12 & -24 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 3A+2B+C=40 \\ 2B+4C=14 \\ 12C=24 \end{cases}$$

que tiene por solución: $A = 11$, $B = 3$, $C = 2$.

Se deberán utilizar 11 unidades de A, 3 de B y 2 de C.

84. Máquina de aparcamiento. En una máquina para pagar de un aparcamiento solo se admiten monedas de 50 céntimos, 1 € y 2 €. Si en un momento dado hay 68 monedas por un valor de 74 €, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?

Consideramos:

x = «monedas de 50 céntimos»

y = «monedas de 1 euro»

z = «monedas de 2 euros»

Con la información del enunciado deducimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=68 \\ 0{,}5x+y+2z=74 \\ x\geq 0; y\geq 0; z\geq 0; x,y,z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{cases} x+y+z=68 \\ 5x+10y+20z=740 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=68-\lambda \\ x+2y=148-4\lambda \end{cases} \xrightarrow[E2=E2-E1]{} \begin{cases} x+y=68-\lambda \\ y=80-3\lambda \end{cases}$$

Si y = 80 - 3λ, entonces $x = 68 - \lambda - 80 + 3\lambda = 2\lambda - 12$.

Solución: $x = 2\lambda - 12, y = -3\lambda + 80, z = \lambda$.