1. Matrices y tipos de matrices

1. Indica la dimensión y de qué tipo son estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&5&7\\0&5&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

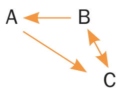
$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\-4&3&1\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&1&2\\0&2&6\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

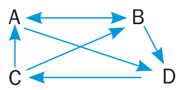
A: cuadrada y diagonal	2×2
B: rectangular	2×3
C: fila y nula	1×3
D: columna	2×1
E: cuadrada y triangular inferior	3×3
F: cuadrada	3×3
G: cuadrada y diagonal	3×3

Por otra parte,

- *A* es una matriz simétrica porque $A=A^{+}$. Además, se observa que la diagonal principal es como un espejo. $A=A^{t}$
- *F* también es simétrica porque $F=F^{t}$
- *G* también es simétrica.

2. Halla la matriz de incidencias de los siguientes grafos:

a)


b)


$$M=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad M=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

3. Determina los valores de *a* y *b* para los cuales las matrices de los siguientes apartados son iguales:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}0&1\\3&2+b\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\b&a\end{pmatrix}\quad b)\ A=\begin{pmatrix}a+b&1\\3&b\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\3&3\end{pmatrix}$$

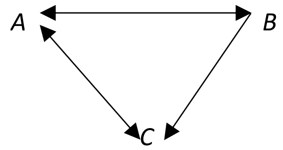
$$a)\quad A=B\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1\\3&2+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\b&a\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}0=0\\1=1\\3=b\\2+b=a\end{array}\right.\quad\Rightarrow a=5,\qquad b=3$$

b) $A = B \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 3 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 1=1 \\ 3=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a=-1, \qquad b=3$

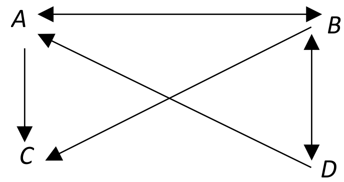
4. Dibuja los grafos cuyas matrices de incidencias son:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean *A, B* y *C* los vértices del grafo cuya matriz de incidencias es *M*. Entonces:



Por otra parte, sean *A, B, C* y *D* los vértices del grafo cuya matriz de incidencias es *P.* Entonces:



2. Suma y diferencia de matrices

5. Efectúa las siguientes operaciones de matrices:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

6. Halla la matriz *X* que verifica la ecuación *A* + *X* = *B*, donde:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&3&2\\-1&2&1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}-5&3&0\\2&-2&1\\3&0&2\end{pmatrix}$$

Para poder sumar las matrices *A* y *X*, la matriz X ha de ser de orden 3. Si $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, entonces,

$$A+B\Rightarrow\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&3&2\\-1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3&0\\2&-2&1\\3&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2+a&b&-1+c\\d&3+e&2+f\\-1+g&2+h&1+i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3&0\\2&-2&1\\3&0&2\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$X=\begin{pmatrix}-7&3&1\\2&-5&-1\\4&-2&1\end{pmatrix}$$

7. Sean $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&4&2\\-1&5&7\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-2\\-3&-1&6\end{pmatrix}$**, calcula:**

a) A^t **y** B^t

b) A^t+B^t

c) $(A+B)^t$

***d)* ¿Es cierto que** $(A+B)^t=A^t+B^t$

a) $A^t=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&5\\3&2&7\end{pmatrix}$ $\quad y\ B^t=\begin{pmatrix}2&3&-3\\1&0&-1\\4&-2&6\end{pmatrix}$

b) $A^t+B^t=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&5\\3&2&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&-3\\1&0&-1\\4&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&-4\\1&4&4\\7&0&13\end{pmatrix}$

c) $A+B=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&4&2\\-1&5&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-2\\-3&-1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&7\\5&4&0\\-4&4&13\end{pmatrix}$

d) $(A+B)^t=\begin{pmatrix}3&5&-4\\1&4&4\\7&0&13\end{pmatrix}$

Efectivamente, $(A+B)^t=A^t+B^t$

Por tanto, la traspuesta de la suma es igual a la suma de las traspuestas.

8. Halla los valores de *a, b, c* y *d* que verifican la ecuación matricial $X-A=B^t-I$**, donde:**

$X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}5&2\\8&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\0&-1\end{pmatrix}$ **e *I* es la matriz identidad de orden dos.**

$$X - A = B^t - I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-5 & b-2 \\ c-8 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-5=2 \\ b-2=0 \\ c-8=4 \\ d=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=2 \\ c=12 \\ d=-2 \end{cases}$$

3. Multiplicación de un número por una matriz

9. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcula, cuando sea posible, las siguientes matrices:

a)* 3*A* *b)* 3*A* – 5*B* *c)* 2(*C* – *D*) *d)* 2B + *D* *e) $\frac{1}{2}C$

a) $3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

b) $3A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 0 & 12 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 28 & -16 \\ -20 & 7 & -16 \end{pmatrix}$

c) $2(C - D) = 2\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -16 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$

d) 2*B* es de orden 2×3 y *D* es de orden 2×2. Por tanto, no es posible realizar esta operación.

e) $\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. Resuelve: 2*X* – *A* = *B* si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Como *A* es de orden 2, entonces *X* tiene también que ser de orden 2.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces,

$$2X - A = B \Rightarrow 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-1 & 2b-3 \\ 2c+2 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a-1=5 \\ 2b-3=-2 \\ 2c+2=1 \\ 2d=4 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a=3 \\ b=1/2 \\ c=-1/2 \\ d=2 \end{array}$$

Luego, $X = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}$

11. **Si** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$**, halla** $3A^t$ **y** $(3A)^t$**. ¿Son iguales los resultados?**

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3A^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 21 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 3 \\ 12 & 21 & 6 \end{pmatrix} \qquad (3A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 21 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, $3A^t = (3A)^t$

4. Multiplicación de matrices

12. Explica y calcula cuáles de estos productos se pueden realizar: *AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_{2\times3}$, $B_{3\times2}$, $C_{3\times1}$ y $D_{1\times3}$.

- $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = AB_{2\times2}$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

- $A_{2\times3}\cdot C_{3\times1} = AC_{2\times1}$

$$AC=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

- $A_{2\times3}\cdot D_{1\times3}\ \nexists$, No se puede calcular.
- $B_{3\times2}\cdot A_{2\times3} = BA_{3\times3}$

$$BA=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 5 & 10 & 0 \\ -8 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

- $B_{3\times2}\cdot C_{3\times1}\ \nexists$
- $B_{3\times2}\cdot D_{1\times3}\ \nexists$
- $C_{3\times1}\cdot A_{2\times3}\ \nexists$
- $C_{3\times1}\cdot B_{3\times2}\ \nexists$
- $B_{3\times1}\cdot D_{1\times3} = BD_{3\times3}$

$$CD=\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $D_{1\times3}\cdot A_{2\times3}\ \nexists$
- $D_{1\times3}\cdot B_{3\times2} = DB_{1\times2}$

$$DB=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -9 \end{pmatrix}$$

- $D_{1\times3}\cdot C_{3\times1} = DC_{1\times1}$

$$DC=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}=(7)$$

13. Halla los valores de *x* e *y* tales que: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2x & 2+y \\ 0 & -2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2x=y \\ 2+y=0 \\ 0=0 \\ -2y=4 \end{cases}\Rightarrow\quad x=-1,\quad y=-2$$

14. Si la traspuesta de *M* es $M^t = (1\ \ 5\ -2)$, calcula MM^t y M^tM.

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- $M_{3\times 1} \cdot M^t_{1\times 3} = MM^t_{3\times 3}$

$$MM^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (\,1\ 5\ -2\,) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 25 & -10 \\ -2 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

- $M^t_{1\times 3} \cdot M_{3\times 1} = M^tM_{1\times 1}$

$$M^tM = (\,1\ 5\ -2\,) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (30)$$

15. **Una empresa tiene tres tiendas que venden ordenadores portátiles, tabletas y teléfonos móviles, entre otros productos. Las matrices *T* y *P* reflejan el coste unitario y el precio de venta de cada uno de los modelos más vendidos de cada tipo, respectivamente. Por otra parte, la matriz *D* muestra el número de unidades vendidas en el mes de diciembre.**

$$T = \begin{array}{ccc} \text{Portátil} & \text{Tableta} & \text{Móvil} \\ (300 & 120 & 280) \end{array} \qquad P = \begin{array}{ccc} \text{Portátil} & \text{Tableta} & \text{Móvil} \\ (550 & 260 & 420) \end{array}$$

$$D = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \text{Tienda1} & \text{Tienda2} & \text{Tienda3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 130 & 100 & 52 \\ 65 & 43 & 38 \\ 250 & 220 & 95 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Portátil} \\ \text{Tableta} \\ \text{Móvil} \end{array} \end{array}$$

Calcula e interpreta los productos: *TD*, *PD* y *(P - T)D*.

- $TD = (\,300\ 120\ 280\,) \cdot \begin{pmatrix} 130 & 100 & 52 \\ 65 & 43 & 38 \\ 250 & 220 & 95 \end{pmatrix} = (\,116\,800\ \ 96\,760\ \ 46\,760\,).$

  Representa el coste de todas las unidades vendidas (de ordenadores portátiles, tabletas y móviles) en cada una de las tiendas durante el mes de diciembre. Así, por ejemplo, en la tienda 1 el coste de todas las unidades vendidas fue de 116 800€.

- $PD = (\,550\ 260\ 420\,) \cdot \begin{pmatrix} 130 & 100 & 52 \\ 65 & 43 & 38 \\ 250 & 220 & 95 \end{pmatrix} = (\,193\,400\ \ 158\,580\ \ 78\,380\,)$

  En este caso representa los ingresos por venta de estos tres productos en cada una de las tiendas durante el mes de diciembre. Así, por ejemplo, en la tienda 3 los ingresos por renta ascienden a 78380 €.

- $(P - T)D = (\,76\,600\ \ 61\,820\ \ 31\,620\,)$

  De las ganancias durante el mes de diciembre en cada una de las tiendas.

5. Reducción por filas y formas escalonadas

16. Halla una forma escalonada por filas de estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\1&0&0&1\\-2&4&0&2\end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&3\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&0\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_2\to F_2-2F_1}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{pmatrix}$
- $B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\ \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-2F_1}\ \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-5&2\\0&-5&2\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_3\to F_3-F_2}\ \begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$
- $C=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\1&0&0&1\\-2&4&0&2\end{pmatrix}\ \xrightarrow[F_3\to F_3+2F_2]{F_1\leftrightarrow F_2}\ \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&4&0&4\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_3\to F_3-4F_2}\ \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&0&-4&-4\end{pmatrix}$

17. Escribe la forma escalonada reducida por filas de las matrices:

$$D=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\\1&2\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-3&4\\-2&-5&4\end{pmatrix}$$

- $D=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\\1&2\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_1\to \frac{1}{2}F_1}\ \begin{pmatrix}1&3/2\\4&6\\1&2\end{pmatrix}\ \xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-4F_1}$

  $\begin{pmatrix}1&3/2\\0&0\\0&1/2\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\ \begin{pmatrix}1&3/2\\0&1/2\\0&0\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_2\to 2F_2}$

  $\begin{pmatrix}1&3/2\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_1\to F_1-\frac{3}{2}F_2}\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$
- $E=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_2\to F_2-2F_1}\ \begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_2\to \frac{1}{5}F_2}\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
- $F=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-3&4\\-2&-5&4\end{pmatrix}\ \xrightarrow[F_3\to F_3+2F_1]{F_2\to F_2+F_1}\ \begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}\ \xrightarrow{F_2\to(-1)F_2}\ \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-4\\0&-1&4\end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Potencias de matrices

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $M = A^2 - 2A + I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$M = A^2 - 2A + i = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & -6 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

19. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla A^2, A^3, A^4 y A^5.

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$
- $A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot (-I) = -A$
- $A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot (-A) = -A^2$

20. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, determina los valores de a y b tales que verifiquen la igualdad $M^2 + aM + bI = 0$.

$$M^2 = M\cdot M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$M^2 + aM + bI = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 5a \\ 2a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 14+2a+b & 5+5a \\ 2+2a & 11-a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 14+2a+b=0 \\ 5+5a=0 \\ 2+2a=0 \\ 11-a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \quad a=-1 \text{ y } b=-12$$

21. Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determina una expresión general para la potencia enésima C^n.

- $C^2 = C\cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
- $C^3 = C\cdot C^2 = C\cdot I = C$
- $C^4 = C\cdot C^3 = C\cdot C = C^2 = I$

Luego,

$$C^n = \begin{cases} C, \text{ si } n \text{ es impar} \\ I, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices B tales que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

Para que $(A+b)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - B^2$, se tiene que verificar que $AB = BA$. Es decir, A y B tienen que cumplir la propiedad conmutativa.

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3c & b-3d \\ c & d \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3a+b \\ c & -3c+d \end{pmatrix}$

Luego,

$$\begin{cases} a-3c=a \\ b-3d=-3a+b \\ c=c \\ d=-3c+d \end{cases}$$

Para que se cumpla la 1ª y la 4ª ecuación tiene que se $C = 0$.
De la 2ª ecuación se tiene que $a = d$.
Por tanto, la matriz B es:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ o & a \end{pmatrix} \quad , \quad a,b \in \mathbb{R}$$

23. **Halla la potencia n-ésima, P^n, de la matriz** $P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

- $P^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$
- $P^2=P\cdot P^2=P\cdot I=P$

Luego,

$$P^n=\begin{cases}P, \text{ si es } n \text{ es impar}\\ I, \text{ si } n \text{ es par}\end{cases}$$

7. Matriz inversa

24. **Calcula, si existen, las matrices inversas de estas matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

- $(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ -3 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2+3F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 11 & 3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to \frac{1}{11}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3/11 & 1/11\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{F_1\to F_1-2F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 5/11 & -2/11\\ 0 & 1 & 3/11 & 1/11\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

Luego,

- $(B|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2-2F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)$

  Como la parte izquierda de la matriz contiene una segunda fila de ceros, entonces no es posible continuar el algoritmo y, en consecuencia, no existe la matriz inversa B^{-1}.

- $(C|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 5 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 5 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to(-1)F_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 4F_1]{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & -4 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{9}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4/9 & 0 & -1/9 & 5/9 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 7F_2]{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/9 & 0 & 1/9 & 4/9 \\ 0 & 1 & 4/9 & 0 & -1/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & 1/9 & 1 & -7/9 & -1/9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 9F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/9 & 0 & 1/9 & 4/9 \\ 0 & 1 & 4/9 & 0 & -1/9 & 5/9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - \frac{4}{9}F_3]{F_1 \to F_1 + \frac{4}{9}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left(I \middle| C^{-1}\right)$$

- $$\left(D \middle| I\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Como, la segunda y la tercera fila de la izquierda de la matriz son iguales, haciendo transformaciones resultará la tercera fila de ceros y, por tanto, no tiene inversa.

$$\nexists D^{-1}$$

25. **Halla $(A^t)^{-1}$ y $(A^{-1})^t$, y comprueba que son iguales para:**

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ***b)*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(A^t \middle| I\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 14/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to \frac{3}{14}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 14/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to \frac{3}{14}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 3/14 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/7 & 1/14 \\ 0 & 1 & -1/7 & 3/14 \end{array}\right) = \left(I \middle| (A^t)^{-1}\right)$$

Luego, $(A^t)^{-1} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

- $$\left(A \middle| I\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \; F_1 \leftrightarrow F_2 \; \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to (-1)F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&-4&0&-1\\0&14&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to\frac{1}{14}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-4&0&-1\\0&1&1/14&3/14\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1+4F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2/7&-1/7\\0&1&1/14&3/14\end{array}\right)=\left(I\,|\,A^{-1}\right)$$

Luego,

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&-2\\1&3\end{pmatrix}\ \text{y}\ (A^{-1})^t=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&1\\-2&3\end{pmatrix}$$

Por tanto, $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

b) $A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $(A^t)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

También se cumple que $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$

26. Calcula la matriz inversa $(C+I)^{-1}$, si $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}$.

$$A=C+I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&0&4\end{pmatrix}$$

$$\left(A\,|\,I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&0&4&0&0&1\end{array}\right)\ F_1\leftrightarrow F_3\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&0&0&1\\0&2&1&0&1&0\\2&0&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_3\to F_3-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&0&0&1\\0&2&1&0&1&0\\0&0&-8&1&0&-2\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to\frac{1}{8}F_3]{F_2\to\frac{1}{2}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&4&0&0&1\\0&1&1/2&0&1/2&0\\0&0&1&-1/8&0&1/4\end{array}\right)=\left(I\,|\,A^{-1}\right).$$

Por tanto,

$$A^{-1}=(C+I)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8&0&0\\1&8&-2\\-2&0&4\end{pmatrix}$$

27. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}x&0&-1\\-1&0&0\\0&1&x\end{pmatrix}$; $x\in\mathbb{R}$:

a) **¿Para qué valores de x se cumple qué $A^3=I$?**

b) **Si $x\neq 0$ utiliza el apartado anterior para hallar A^{-1}.**

a)

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$
- $A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$
- Para $A^3 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0$

  Para $x = 0$ se verifica que $A^3 = I$.

b) Si $A^3 = I \Rightarrow A \cdot A^2 = I \Rightarrow A^{-1}A^2$

Def. de matriz inversa.

Por tanto, si $x = 0$, se tiene:

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Ecuaciones matriciales

28. Sean: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX - BX = C$

b) $X = AX + C$

c) $AX - B = 3X$

d) $A^tAX = A^tB$

a) $AX - BX = C \Rightarrow (A-B)X = C \Rightarrow (A-B)^{-1}(A-B)X = (A-B)^{-1}C \Rightarrow$

$IX = (A-B)^{-1} \cdot C \Rightarrow X = (A-B)^{-1}C$

Calculemos la matriz inversa de $A - B$.

$$\left((A-B)|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\-1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\-1&-2&-1/3&-2/3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\to F_2+F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\0&-3/2&1/2&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to -\frac{2}{3}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&1/2&0\\0&1&-1/3&-2/3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1\to F_1-\frac{1}{2}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2/3&1/3\\0&1&-1/3&-2/3\end{array}\right)=\left(I|(A-B)^{-1}\right)$$

Luego $(A-B)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\-1&-2\end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X=(A-B)^{-1}C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&5\\0&-7\end{pmatrix}$$

b) $X=AX+C\Rightarrow X-AX=C\Rightarrow(I-A)X=C\Rightarrow(I-A)^{-1}(I-A)X=(I-A)^{-1}C\Rightarrow$

$\Rightarrow IX=(I-A)^{-1}C\Rightarrow X=(I-A)^{-1}C$

$$I-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

Como (I - A) tiene la segunda fila de ceros no tiene inversa. Por tanto, la ecuación propuesta no tiene solución.

c) $AX-B=3X\Rightarrow AX-3X=B\Rightarrow(A-3)X=B\Rightarrow(A-3I)^{-1}(A-3I)X=(A-3I)^{-1}B\Rightarrow$

$\Rightarrow IX=(A-3I)^{-1}B\Rightarrow X=(A-3I)^{-1}B$

$$A-3I=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-4\end{pmatrix}.$$

Calculemos la inversa de la matriz $A-3I$

$$\left((AB-3I)|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&1&0\\0&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to-\frac{1}{4}F_2]{F_1\to(-1)F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&0\\0&1&0&-1/4\end{array}\right)$$

Luego, $(A-3I)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1/4\end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X=(A-3I)^{-1}B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1/4&-1/4\end{pmatrix}$$

d) $A^tAX=A^tB\Rightarrow(A^tA)^{-1}(A^tA)X=(A^tA)^{-1}A^tB\Rightarrow IX=A^{-1}\cdot(A^t)^{-1}(A^t)B\Rightarrow X=A^{-1}IB\Rightarrow$

$\Rightarrow X=A^{-1}B$

(1) $(A^tA)^{-1}=A^{-1}\cdot(A^t)^{-1}$

Calculemos, pues, la matriz inversa de A.

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to-F_2]{F_1\to\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&0\\0&1&0&-1\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

29. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) **Halla los valores de *a* para los cuales *A* no es invertible.**

b) **Para *a* = 3, calcula la matriz inversa de *A* y resuelve la ecuación matricial *AX* = *B*.**

a) Utiliza una calculadora o software para comprobar que la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a-2} & 0 & \dfrac{-2}{a-2} \\ \dfrac{1}{2a-a^2} & \dfrac{1}{a} & \dfrac{2}{a(a-2)} \\ \dfrac{-1}{a} & \dfrac{-2}{a} & \dfrac{a+2}{a} \end{pmatrix}$$

Luego, no existe la matriz inversa A^{-1} para $a = 0$ y $a = 2$.

b) Para $a = 3$ la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Veamos, ahora, cómo resolver la ecuación $AX = B$.

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$	Se multiplica ambos miembros por la izquierda por A^{-1}
$\left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B$	Propiedad asociativa del producto de matrices
$IX = A^{-1}B$	Definición de matriz inversa
$X = A^{-1}B$	Propiedad de la matriz identidad del producto de matrices

Por tanto,

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

9. Rango de una matriz

30. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -6 & 11 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \Leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

  La forma escalonada por filas tiene dos filas no nulas, entonces rg(A) = 2.

- $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \Leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

  $\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

  Por tanto, rg(B) = 3.

- $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -6 & 11 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -6 & 11 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

  $\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  La forma escalonada tiene dos filas no nulas y, en consecuencia, rg(C) =2
  Además, $f_2=3f_3+f_1$

31. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentra los valores de *m* para los que la matriz *C* = *AB* tiene rango dos.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 25 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+1 & 2m+2 \\ -m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2m+1 & 2m+2 \\ -m+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(2m+1)F_2 - (-m+1)F_1} \begin{pmatrix} 2m+1 & 2m+2 \\ 0 & -(-m+1)(2m+2) \end{pmatrix}$$

La matriz C tendrá rango dos si una matriz escalonada por filas tiene dos filas no nulas. Por tanto, si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, entonces rg(C)=2.

Actividades

Matrices. Operaciones con matrices

32. ¿Para qué valores de *x* e *y* son iguales las matrices *A* y *B*?

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2+x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B \Rightarrow \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = 2+X \\ 0 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 3 \;,\quad y = 5$$

33. ¿Es cierto que toda matriz diagonal es simétrica? Pon ejemplos.

En general toda matriz diagonal tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Que coincide con su matriz traspuesta A⁺, es decir, $A = A^t$. Por tanto, efectivamente toda matriz diagonal es simétrica.

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ son dos ejemplos de matrices diagonales y, por tanto, simétricas de orden dos y tres, respectivamente.

34. Analiza si son simétricas o antisimétricas estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = -A^t$

  Por tanto, *A* es una matriz antisimétrica.

- $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

  Luego, *B* no es ni simétrica ni antisimétrica.

- $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$ y $C^t=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow C=C^t$

  Por tanto, C es una matriz simétrica.

35. **Dadas las matrices:** $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 7\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 7 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

a) **Responde, sin realizar cálculos, a las siguientes cuestiones: ¿qué pares de matrices se pueden sumar? ¿Qué pares de matrices se pueden multiplicar?**

b) **Calcula 2*B* y 3*C* – 2*D*.** ***c)*** **Halla, si existen, *AB* y *BA*.**

a) $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 2}$, $C_{3\times 3}$, $D_{3\times 3}$ y $E_{3\times 2}$

Se pueden calcular las siguientes sumas:

$B+E$ y $C+D$

Mientras que se pueden realizar los siguientes productos:

$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=AB_{2\times 2}$, $A_{2\times 3}\cdot C_{3\times 3}=AC_{2\times 3}$

$A_{2\times 3}\cdot C_{3\times 3}=AC_{2\times 3}$, $A_{2\times 3}\cdot E_{3\times 2}=AE_{2\times 2}$

$B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=BA_{3\times 3}$, $C_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2}=CB_{3\times 2}$

$C_{3\times 3}\cdot D_{3\times 3}=CD_{3\times 3}$, $C_{3\times 3}\cdot E_{3\times 2}=CE_{3\times 2}$

$D_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2}=DB_{3\times 2}$, $D_{3\times 3}\cdot C_{3\times 3}=DC_{3\times 3}$

$D_{3\times 3}\cdot E_{3\times 2}=DE_{3\times 2}$, $E_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=EA_{3\times 3}$

b)
- $2B=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -6 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

- $3C-2D=3\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 7 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -6\\ 6 & 3 & 9\\ 3 & -15 & 21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 14 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -12\\ -8 & 3 & 9\\ 1 & -19 & 21\end{pmatrix}$

c) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 8\\ -3 & -6 & 0\\ 1 & 7 & 4\end{pmatrix}$

36. **Si A es una matriz de dimensión 3 × 4 y el producto AB es de dimensión 3 × 2, ¿cuál es la dimensión de B?**

Sea B una matriz de dimensión $m \times n$. Entones,

$$A_{3\times 4} \cdot B_{m\times n} = AB_{3\times 2}$$

Para que se pueda efectuar el producto AB el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B, luego $m = 4$.
Por otro lado, como el producto AB tiene 2 filas, entonces $n = 2$.
En resumen, B es una matriz de dimensión 4×2.

37. **Si A es una matriz de dimensión 3 × 2 y B es de dimensión 4 × 3, ¿qué producto está definido, AB o BA? ¿Cuál es su dimensión?**

- $A_{3\times 2} \cdot B_{4\times 3}$ no está definido.
- $B_{4\times 3} \cdot A_{3\times 2} = BA_{4\times 2}$

Solo está definido el producto BA y es de dimensión 4×2.

38. **Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, ¿existe alguna matriz P tal que MP o bien PM sea una matriz fila? En el caso de respuesta afirmativa, pon ejemplos.**

Sea P una matriz de dimensión $m \times n$, es decir,

$$P_{m\times n}$$

- Si MP tiene que ser una matriz fila, entonces,

$$M_{2\times 2} \cdot P_{m\times n} = MP_{2\times n}$$

  En este caso, no existe ninguna matriz P.
- Si PM tiene que ser una matriz fila, entonces,

$$P_{m\times n} \cdot M_{2x2} = PM_{m\times 2}$$

  Luego, m = 1, para que PM sea una matriz fila y n = 2 para que sea posible el producto.

$$P_{1\times 2}$$

  Por ejemplo,

$$p = (-5 \;\; 3)$$

$$PM = (-5 \;\; 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = (-11 \;\; -12)$$

39. **¿Qué condición deben cumplir dos matrices A y B para que tanto AB como BA existan?**

Supongamos que A es de dimensión $m \times n$ y B de dimensión $p \times q$

- $A_{m\times n} \cdot B_{p\times q} = AB_{m\times q} \Rightarrow N = P$
- $B_{p\times q} \cdot Q_{m\times n} = BA_{p\times n} \Rightarrow q = m$

Para que existan tanto AB como BA se tiene que cumplir que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B y que el número de columnas de B coincida con el número de filas de A. Lo que es equivalente, que si A es de dimensión $m \times n$, entonces B tiene que tener de dimensión $n \times m$.

40. **Realiza, si es posible, los siguientes productos de matrices:**

a) $(1 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot(3 \quad 2 \quad 0)$

c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) $(1 \ 2)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (1)$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot(3 \ 20) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$

41. **Considera estas matrices y determina los valores de *x, y, z* que satisfacen *AB* − 2*C* = *D*.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \\ x \end{pmatrix}$$

$$2C = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB - 2C = D \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2x+y-2 &= z \\ x+2y-2 &= z \\ z &= x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

42. **Encuentra dos matrices *A* y *B* tales que *AB* = *BA*.**

La respuesta es abierta.

Por ejemplo, si fijamos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tenemos que encontrar una matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $AB = BA$. Así,

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\2c&2d\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a+2b\\0&c+2d\end{pmatrix}$$

$$AB=BA\Rightarrow\begin{cases}c=0\\d=a+2b\\2c=0\\2d=c+2d\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}c=0\\a=d-2b\\b,d\in\mathbb{R}\end{array}$$

Por tanto, cualquier matriz $B=\begin{pmatrix}d-2b&b\\0&d\end{pmatrix}$ conmutará con A. Por ejemplo, para b = -2 y d = 3.

$$B=\begin{pmatrix}7&-2\\0&3\end{pmatrix}$$

En resumen, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}7&-2\\0&3\end{pmatrix}$

Son dos matrices que verifican $AB=BA$

43. Dadas estas matrices realiza, si es posible, las operaciones:

a) AD ***b) BA*** ***c) AB*** ***d) DA*** ***e) B + AC*** ***f) 3DC***

g) 2AD + 4CB ***h) B^2*** ***i) D^2*** ***j) ADC*** ***k) BAC***

$$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\\-1&2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

a) $A_{2\times3}\cdot D_{3\times3}=AD_{2\times3}$

$$AD=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5&3\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

b) $B_{2\times2}\cdot A_{2\times3}=BA_{2\times3}$

$$BA=\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&8&4\\-3&4&-4\end{pmatrix}$$

c) $A_{2\times3}\cdot B_{2\times2}\quad\nexists$

d) $D_{3\times3}\cdot A_{2\times3}\quad\nexists$

e) $B_{2\times2}+A_{2\times3}\cdot C_{3\times2}=B_{2\times2}+AC_{2\times2}$

$$B+AC=\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\0&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&13\\-3&-1\end{pmatrix}$$

f) $D_{3\times3}\cdot C_{3\times2}=DC_{3\times2}$

$$3DC=3\begin{pmatrix}1&1&3\\0&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\0&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&27\\-6&12\\9&3\end{pmatrix}$$

g) $A_{2\times3}\cdot D_{3\times3}+C_{3\times2}\cdot B_{2\times2}=AD_{2\times3}+CB_{3\times2}$

No existe.

h) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

i) $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

j) $A_{2\times3} \cdot D_{3\times3} \cdot C_{3\times2} = ADC_{2\times2}$

$$(AD)C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

k) $B_{2\times2} \cdot A_{2\times3} \cdot C_{3\times2} = BAC_{2\times2}$

$$(BA)C = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -2 & -17 \end{pmatrix}$$

44. Halla los valores de *x* e *y* tales que: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & y \\ 3 & y \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 & 4 \\ 3x & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+1 & 4 \\ 3x & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & y \\ 3 & y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+1=2 \\ 4=y \\ 3x=3 \\ 6=y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1/2 \\ y=4 \\ x=1 \\ y=6 \end{array}$$

NO existen valores de *x* e *y* que verifiquen esa igualdad.

45. Calcula los valores de *a, b, c* y *d* tales que: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 2a-3c & 2b-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} a-2c=1 \\ 2a-3c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3 \quad , \quad c=1 \\ \\ \left.\begin{array}{r} b-2d=0 \\ 2b-3d=2 \end{array}\right\} \Rightarrow d=2 \quad , \quad b=4 \end{array}\right.$$

46. **Sean** $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$**. ¿Existe algún valor de *a* para el cual *AB* = *BA*?**

- $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+3a & 8 \\ -2+2a & 3 \end{pmatrix}$
- $BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2a-2 & 3a+4 \end{pmatrix}$

$$AB=BA\Rightarrow\begin{pmatrix} 4+3a & 8 \\ -2+2a & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2a-2 & 3a+4 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{r} 4+3a=3 \\ 8=8 \\ -2+2a=2a-2 \\ 3=3a+4 \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4+3a=3 \quad\Rightarrow\quad a=-{}^{1}\!/_{3}$$

47. **Encuentra dos matrices *A* y *B* tales que *AB* = *0*, con *A* ≠ *0*, y *B* ≠ *0*.**

La respuesta es abierta.

Por ejemplo, las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ son matrices no nulas y, sin embargo, *AB* = 0.

En efecto,

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

48. **Sean** $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **. Comprueba que *AB* =*AC* y, sin embargo, *B* ≠ *C*.**

- $AB=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -21 & -21 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$
- $AC=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -21 & 9 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

$$B\neq C$$

49. **Sean** $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&3\\2&4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3&2\\0&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ **y** $k=2$**. Comprueba que son ciertas estas propiedades de las matrices traspuestas:**

a) $(A^t)^t=A$ ***b)*** $(A+B)^t=A^t+B^t$ ***c)*** $(AB)^t=B^tA^t$ ***d)*** $(kA)^t=kA^t$

a) $A^t=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\0&3&1\end{pmatrix}$, $(A^t)^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&1&3\\2&4&1\end{pmatrix}$

Luego, $(A^t)^t=A$.

b) $A+B=\begin{pmatrix}-1&4&2\\2&1&4\\4&5&0\end{pmatrix}$, $(A+B)^t=\begin{pmatrix}-1&2&4\\4&1&5\\2&4&0\end{pmatrix}$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\0&3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&4\\4&1&5\\2&4&0\end{pmatrix}$$

Efectivamente, $(A+B)^t=A^t+B^t$

c) $AB=\begin{pmatrix}0&0&1\\4&9&2\\0&7&7\end{pmatrix}$, $(AB)^t=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&9&7\\1&2&7\end{pmatrix}$

$$B^tA^t=\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&2\\1&1&4\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&9&7\\1&2&7\end{pmatrix}$$

Así, $(AB)^t=B^tA^t$

d) $2A=\begin{pmatrix}0&2&0\\4&2&6\\4&8&2\end{pmatrix}$, $(2A)^t=\begin{pmatrix}0&4&4\\2&2&8\\0&6&2\end{pmatrix}$

$$2A^t=\begin{pmatrix}0&4&4\\2&2&8\\0&6&2\end{pmatrix}$$

Por tanto, $(KA)^t=KA^t$.

50. **Sea** $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$**. Encuentra una matriz** A **tal que** $AB=I_2$**.**

Sea $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ 2a+3b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3, \quad b=-2 \\ \left.\begin{array}{r} c+d=0 \\ 2c+3d=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=-1, \quad d=1 \end{cases}$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

51. Halla todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{r} a+b=a \\ b=b \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{r} c+d=a+c \\ d=b+d \end{array}\right\} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b=0 \\ d=a \end{array} \quad a,c \in \mathbb{R}$$

Luego,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \quad a,c \in \mathbb{R}$$

52. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) **Comprueba que las dos matrices son simétricas.**

b) **Utilízalas para verificar que, cuando dos matrices *A* y *B* son simétricas, entonces $(AB)^t = BA$.**

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A = A^t$ y *A* es una matriz simétrica.

$B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Luego, $B = B^t$ y *B* es una matriz simétrica.

b) En general, $(AB)^t = B^t A^t$. Pero si A y B son simétricos, entonces $B^t A^t = BA$. Por tanto,

$$(AB)^t = BA$$

Forma escalonada

53. Halla una forma escalonada por filas de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2-3F_1}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -14\end{pmatrix}$
- $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
- $C=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 2 & 3 & -4\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to 3F_3-2F_1]{F_2\to 3F_2-2F_1}\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 0 & -3 & -30\\ 0 & 0 & -36\end{pmatrix}$
- $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 6 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-6F_1]{F_2\to F_2-3F_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 0\\ 0 & -10 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3-2F_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

54. Encuentra la forma escalonada reducida por filas de:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ -1 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\to\frac{1}{2}F_1}\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2-3F_1}\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 7/2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to\frac{2}{7}F_2}$

  $\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\to F_1-\frac{1}{2}F_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$
- $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3-2F_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3+F_2]{F_1\to F_1-F_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to(-1)F_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

  $\xrightarrow[F_2\to F_2-3F_3]{F_1\to F_1+F_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$
- $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2-3F_1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -7\\ 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to-\frac{1}{7}F_2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-2F_2]{F_1\to F_1-2F_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
- $D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ -1 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\to(-1)F_1}\begin{pmatrix}1 & -4 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2-2F_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 9F_2]{F_1 \to F_1 + 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{13}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_3]{F_1 \to F_1 + 6F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17/13 \\ 0 & 1 & 0 & 5/13 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 \end{pmatrix}$$

Potencias de matrices

55. Calcula AB, BA, $3A^2 + 2B$ y $B^2 - 2A$ para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 3 & 21 & 21 \\ -1 & 21 & 18 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 13 \\ 5 & -1 & 3 \\ 28 & 7 & 22 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & -2 \\ 4 & 30 & 29 \end{pmatrix}$

- $3A^2 + 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 13 \\ 16 & 20 & 18 \\ 13 & 26 & 31 \end{pmatrix}$
- $B^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 0 & -2 & -2 \\ 4 & 30 & 29 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ -6 & -2 & -8 \\ -4 & 28 & 25 \end{pmatrix}$

56. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Calcula A^n y B^n.

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$
- $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (-I) = -A$

$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot (-A) = -A^2 = I$

$A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot I = A$

$A^6 = A \cdot A^5 = A \cdot A = A^2 = -I$

$A^7 = A \cdot A^6 = A \cdot (-I) = -A$

$A^8 = A \cdot A^7 = A \cdot (-A) = -A^2 = I$

$\vdots$

$$A^n = \begin{cases} A, & \text{si } n = 1, 5, 9, \ldots \\ -I, & \text{si } n = 2, 6, 10, \ldots \\ -A, & \text{si } n = 3, 7, 11, \ldots \\ I & \text{si } n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$
- $B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$

$B^4 = B \cdot B^3 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 3a \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$B^n = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$

57. Sean: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Compara los resultados de cada uno de estos apartados:

a) ***A*(*B* + *C*) y *AB* + *AC*** ***b)*** **(*A* − *B*)² y *A*² − *AB* − *BA* + *B*².**

a) $A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$AB + AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -3 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Efectivamente, $A(B+C) = AB + AC$ puesto que es la propiedad distributiva del producto de matrices.

b) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \\ -13 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -4 & 9 & -2 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Como $AB \neq BA$, entonces:
$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$

$$A^2 - AB - BA + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \\ -13 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

58. Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula C^n.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por consiguiente,

$$C^n = 0 \quad , \quad \text{si } n \geq 3.$$

59. **Determina las matrices** $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ **que verifican** P^2 ⍰ P**.**

$$P^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c & (1+a)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } P^2 = P \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c & (1-a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a & \Rightarrow \ a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a1) = 0 \Rightarrow a = 0, \quad a = 1 \\ 0 = 0 & \\ c = c & \Rightarrow c \in \mathbb{R} \\ (1-a)^2 = 1-a & \Rightarrow (1-a)^2 - (1-a) = 0 \Rightarrow -a(1-a) = 0 \Rightarrow a = 0, \quad a = 1 \end{cases}$$

Matriz inversa

60. **Estudia la existencia de la matriz inversa de la matriz diagonal de orden dos:** $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$**.**

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{si } a \neq 0 \\ b \neq 0}]{} \ \substack{F_1 \to \frac{1}{a}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{b}F_2} \ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/b \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

La matriz inversa A^{-1} existe si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, y es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$$

61. **Halla** $(AB)^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}$ **y** $A^{-1}B^{-1}$ **si** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$**.**

- $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$(AB|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&2&1&0\\0&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to\frac{1}{2}F_2]{F_1\to\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1/2&0\\0&1&0&1/2\end{array}\right)\xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&-1/2\\0&1&0&1/2\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow(AB^{-1})=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1/2\end{pmatrix}$$

- $$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&1&0\\2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1-F_2]{F_1\to\frac{1}{3}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}-2&0&0&-1\\5&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&0&1\\5&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1/2\\5&1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-5F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1/2\\0&1&1&-3/2\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2\\1&-3/2\end{pmatrix}$$

$$=(I|A^{-1})\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\end{pmatrix}$$

- $$(B|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}2&-1&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to\frac{1}{2}F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1/2&0&1/2\\0&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1+\frac{1}{2}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&1/2\\0&1&1&0\end{array}\right)=(I|B^{-1})\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

- $$A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\-1&1/2\end{pmatrix}\text{ y } B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\0&1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=(AB)^{-1}$$

Por tanto, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ y $(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$

62. Demuestra que la matriz $\begin{pmatrix}3&4\\-2&-3\end{pmatrix}$ es su propia inversa.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}3&4&1&0\\-2&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to\frac{1}{3}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&4/3&1/3&0\\-2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2+2F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&4/3&1/3&0\\0&-1/3&2/3&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to -3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&4/3&1/3&0\\0&1&-2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1-\frac{4}{3}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&4\\0&1&-2&-3\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

Efectivamente, $A^{-1}=A$.

63. Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, ¿se puede asegurar que A es invertible? En caso afirmativo, expresa A^{-1} en función de A.

Si $A^2 = A + I \Rightarrow A^2 - A = I \Rightarrow A(A - I) = I$ [1]

Por otra parte, si A es invertible entonces

$A \cdot A^{-1} = I$ [2]

De [1] y [2], deducimos que

$A^{-1} = A - I$

Y, por tanto, sí es invertible.

64. ¿Para qué valor de a la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es invertible?

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 \to \frac{1}{a}F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{2}}]{si\ a \neq 0} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 - \frac{1}{a}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/a & -1/2a \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Luego, si $a \neq 0$ la matriz es invertible y, además, es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -1/2a \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

65. Calcula, si existen, las inversas de las siguientes matrices diagonales y extrae conclusiones.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to \frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

  Luego sí existe $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

- $$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 \to \frac{1}{3}F_2 \\ F_3 \to -F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right) = (I|B^{-1})$$

  Por tanto, sí existe. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

- $$(C|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to -F_3]{F_2\to\frac{1}{3}F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1/3&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

Por tanto, sí existe. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}$

Como hay una fila de ceros en la matriz de la izquierda no se puede seguir el algoritmo y, en consecuencia no existe C^{-1}.
En resumen, para que exista la matriz inversa de una matriz diagonal todos sus elementos han de ser distintos de cero. En cuyo caso la matriz inversa también es una matriz diagonal que tiene por elementos los inversos de la matriz dada.

66. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&2\end{pmatrix}$, halla A^2 y A^{-1}.

- $A^2=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$

- $$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}-2&-1&1&0\\3&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to-\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&-1/2&0\\3&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2-3F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&-1/2&0\\0&1/2&3/2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\to 2F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1/2&-1/2&0\\0&1&3&2\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1-1/2F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&-1\\0&1&3&2\end{array}\right)=\left(I|A^{-1}\right)$$

Por tanto,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&2\end{pmatrix}=A$$

Si $A^2=I$ <=> $A\cdot A=I$, luego $A=A^{-1}$ como se ha visto en el algoritmo.

67. Sea la matriz $M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Demuestra que $M^3=O$ y, además, que $I+M+M^2$ es la matriz inversa de $I-M$.

$$M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M^3=M\cdot M^2=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

Luego, $M^3=0$, es decir, es igual a la matriz nula.
Por otra parte,

$$I+M+M^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$I-M=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(I+M+M^2)(I-M)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

Por tanto, $I+M+M^2$ y $I-M$ son inversas puestos que su producto es la matriz identidad.

Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta, es decir, $A^{-1}=A^t$. Determina el valor de a y b para que la siguiente matriz sea ortogonal.

$$A=\begin{pmatrix}3/5&a&0\\b&-3/5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Si A es ortogonal, entonces $A^{-1}=A^t$ y, por tanto, existe la matriz inversa A^{-1}. Luego,

$$A\cdot A^{-1}=I \quad\Rightarrow\quad AA^t=I$$

Así:

$$\begin{pmatrix}3/5&a&0\\b&-3/5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3/5&b&0\\a&-3/5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}9/25+a^2&3/5\,b-3/5\,a&0\\3/5\,b-3/5\,a&b^2+9/25&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{9}{25}+a^2=1 \;\Rightarrow a^2=\dfrac{16}{25}\Rightarrow a=\pm\dfrac{4}{5}\\[2mm] \dfrac{3}{5}b-\dfrac{3}{5}a=0\Rightarrow a=b\\[2mm] b^2+\dfrac{9}{25}=1 \;\Rightarrow b^2=\dfrac{16}{25}\Rightarrow b=\pm\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

Por tanto, $a=b=\dfrac{4}{5}$ o $a=b=\dfrac{-4}{5}$.

Rango de una matriz

68. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\\2&6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&0&6\\-4&5&2\\0&5&14\end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\\2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3-2F_1}\begin{pmatrix}1&3\\0&4\\0&0\end{pmatrix}$

Luego, rg(A) = 2.

- $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

  Luego, rg(B) = 1

- $C=\begin{pmatrix}2&0&6\\-4&5&2\\0&5&14\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2+2F_1}\begin{pmatrix}2&0&6\\0&5&14\\0&5&14\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3-F_2}\begin{pmatrix}2&0&6\\0&5&14\\0&0&0\end{pmatrix}$

  Por tanto, rg(C) = 2

69. Estudia, según los valores de *k*, el rango de estas matrices: $T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&k&3\\4&1&-k\end{pmatrix}$

$M=\begin{pmatrix}1&1&k&k\\k&k&1&1\\1&k&1&k\end{pmatrix}$

- $T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&k&3\\4&1&-k\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3-4F_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&k&3\\0&1&-k+4\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-k+4\\0&k&3\end{pmatrix}$ ç

- $\xrightarrow{F_3\to F_3-kF_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-k+4\\0&0&k^2-4k+3\end{pmatrix}$

  $k^2-4k+3=0\Rightarrow k=1$ y $k=3$

Por tanto:

- Si $k\neq 1$ y $k\neq 3$, entonces rg(T) = 2.
- Si k = 1 o k = 3, entonces rg(T) = 2.

- $M=\begin{pmatrix}1&1&k&k\\k&k&1&1\\1&k&1&k\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-kF_1}\begin{pmatrix}1&1&k&k\\0&0&1-k^2&1-k^2\\0&k-1&1-k&0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}$

$\begin{pmatrix}1&1&k&k\\0&k-1&1-k&0\\0&0&1-k^2&1-k^2\end{pmatrix}$

$1-k^2=0\Rightarrow k=\pm 1$. Por tanto:

- Si $k\neq 1$ y $k\neq -1$, entonces rg(M) = 3.
- Si k = 1, entonces es no nula solo la primera fila y, por tanto, rg(M) = 1.
- Si k = -1, entonces son no nulos las dos primeras filas y rg(M) = 2

70. **Determina el rango de AB si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \;\; 2 \;\; -1)$.**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \;\; 2 \;\; -1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, rg(AB) = 1.

Ecuaciones matriciales

71. **Resuelve estas ecuaciones si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.**

***a)* $X + A = B$** ***b)* $2X - A = B$**

***c)* $3X + 2A = B$** ***d)* $A - X = 3B$**

a) $X + A = B \Rightarrow X = B - A$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $2X - A = B \Rightarrow 2X = B + A \Rightarrow X = \frac{1}{2}(B + A)$.

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

c) $3X + 2A = B \Rightarrow 3X = B - 2A \Rightarrow X = \frac{1}{3}(B - 2A)$

$$X = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

d) $A - X = 3B \Rightarrow X = A - 3B$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 1 & -6 \\ -2 & -16 \end{pmatrix}$$

72. **Halla la matriz X que verifica las siguientes ecuaciones:**

***a)* $AX = BX + C$** ***b)* $X = AX + C$** ***c)* $AX + B = 2X$**

a) $AX = BX + C \Rightarrow AX - BX = C \Rightarrow (A - B)X = C \Rightarrow (A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1}C \Rightarrow$

$\Rightarrow IX = (A-B)^{-1}C \Rightarrow X = (A-B)^{-1}C$

b) $X = AX + C \Rightarrow X - AX = C \Rightarrow (I-A)X = C \Rightarrow (I-A)^{-1}(I-A)X = (I-A)^{-1}C \Rightarrow$

$\Rightarrow IX = (I-A)^{-1}C \Rightarrow X = (I-A)^{-1}C$

c) $AX + B = 2X \Rightarrow AX - 2X = -B \Rightarrow 2X - AX = B \Rightarrow (2I-A)X = B \Rightarrow$

$\Rightarrow (2I-A)^{-1}(2I-A)X = (2I-A)^{-1}B \Rightarrow IX = (2I-A)^{-1}B \Rightarrow X = (2I-A)^{-1}B$

73. Resuelve $2X - A = BX$ si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$2X - A = BX \Rightarrow 2X - BX = A \Rightarrow (2I-B)X = A \Rightarrow (2I-B)^{-1} \cdot (2I-B)X = (2I-B)^{-1}A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow IX = (2I-B)^{-1}A \Rightarrow X = (2I-B)^{-1}A$$

$$2I - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2I-B\,|\,I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to \frac{-1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + \frac{1}{3}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(I\,|(2I-B)^{-1}\right)$$

$$\left(2I-B|\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

74. Resuelve la ecuación $XA = AB$. Ten en cuenta que todas son matrices cuadradas y, además, A es invertible.

$$XA = AB \Rightarrow XAA^{-1} = ABA^{-1} \Rightarrow XI = ABA^{-1} \Rightarrow X = ABA^{-1}$$

75. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **Halla, si existe, la matriz inversa A^{-1}.**

b) **Calcula la matriz X que verifica $AX + B = C^2$.**

a) $\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-F_3]{}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)=\left(I|A^{-1}\right)$

Luego,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) $AX+B=C^2\Rightarrow AX=C^2-B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C^2-B)\Rightarrow IX=A^{-1}(C^2-B)\Rightarrow X=A^{-1}(C^2-B)$

$$C^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&0\\0&9&0\\-2&-1&1\end{pmatrix};\quad C^2-B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&10&0\\-3&-2&1\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X=A^{-1}(C^2-B)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&10&0\\-3&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&10&0\\5&6&-2\\-3&-2&1\end{pmatrix}$$

76. **Encuentra la matriz *X* que verifica *AXB* = *I*, siendo *I* la matriz identidad de orden 2 y *A* y *B* las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$AXB=I\Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}IB^{-1}\Rightarrow IXI=A^{-1}B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}B^{-1}\Rightarrow X=(BA)^{-1}$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\2&6\end{pmatrix}$$

$\left(BA|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&5&1&0\\2&6&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to\frac{1}{2}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&5/2&1/2&0\\2&6&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-2F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&5/2&1/2&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_1\to F_1-\frac{5}{2}F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-5/2\\0&1&-1&1\end{array}\right)=\left(I|(BA)^{-1}\right)$

Luego,

$$(BA)^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5/2\\-1&1\end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X=\begin{pmatrix}3&-5/2\\-1&1\end{pmatrix}$$

Aplicaciones

77. **El comité ejecutivo de una empresa está formado por la presidencia, cuatro directores de área y nueve subdirecciones. La presidencia percibe al año un salario bruto de 250 000 € más un bonus de 130 000 €; los directores tienen un salario de 180 000 € más un bonus de 100 000 €, y el sueldo de las subdirecciones es de 100 000 € con un bonus de 60 000 €.**

a) **Escribe una matriz de dimensión 2 × 3 que represente los salarios y bonus de los miembros de este comité ejecutivo.**

b) **Expresa el número de miembros del comité en una matriz columna.**

c) **Utiliza la multiplicación de matrices para averiguar los salarios y los bonus totales de los miembros del comité.**

a) $$A = \begin{array}{r} \\ \text{Salarios} \\ \text{Bonus} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Presidente} & \text{Directores} & \text{Subdirectores} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 250\,000 & 180\,000 & 100\,000 \\ 130\,000 & 100\,000 & 60\,000 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Presidente} \\ \text{Directores} \\ \text{Subdirectores} \end{array}$$

c) $$AB = \begin{pmatrix} 250\,000 & 180\,000 & 100\,000 \\ 130\,000 & 100\,000 & 60\,000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,870\,000 \\ 1\,070\,000 \end{pmatrix}$$

El comité ejecutivo tiene un salario total de 1 870 000 y un bonus de 1 070 000 €.

78. **Dado el triángulo de vértices *A*(0,0), *B*(5,0) y *C*(2,3):**

a) **Construye la matriz *M* que representa los vértices del triángulo.**

b) **Utiliza las operaciones con matrices para realizar las siguientes transformaciones geométricas:**

1. Trasladar el triángulo 6 unidades hacia la derecha y 2 hacia abajo.

2. Aumentar el triángulo hasta el doble de su perímetro.

3. Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$**, calcular *CM* e interpretar el resultado.**

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $M' = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $CM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

El producto *CM* consigue un triángulo de vectores $A_1(0,0)$, $B_1(5,0)$ y $C_1(2,-3)$ con lo cual se ha realizado una simetría respecto al eje de abscisas del triángulo dado inicialmente.

79. **Una matriz de probabilidades es aquella matriz cuadrada *P* que cumple las siguientes condiciones:**

1. Todos los elementos p_{ij} verifican que $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

2. La suma de los elementos de cada fila es 1.

a) **Comprueba que estas matrices son de probabilidades:**

$$A=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **Demuestra si *AB* también es una matriz de probabilidades.**

c) **¿Es P^2 una matriz de probabilidades?**

a) Comprueba que *AB* también es una matriz de probabilidades.

b) $AB=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,22 & 0,62 & 0,16 \end{pmatrix}$

Efectivamente también es una matriz de probabilidades.

c) Por ejemplo,

$A^2=\begin{pmatrix} 0,1625 & 0,175 & 0,6625 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,26 & 0,28 & 0,46 \end{pmatrix}$ también es una matriz de probabilidades.

80. Una empresa fabrica dos productos, *A* y *B*. En su construcción emplea acero, plástico y tela, y el número de unidades que usa de cada uno de estos materiales para la fabricación de cada producto aparece en la tabla de la izquierda. Esta empresa posee dos plantas de fabricación, P_1 y P_2, cuyos costes unitarios de producción se muestran en la tabla de la derecha.

	Acero	Plástico	Tela
A	3	2	5
B	4	3	7

	P_1	P_2
Acero	13	14
Plástico	7	6
Tela	5	5

a) **Construye dos matrices con la información de las tablas.**

b) **Halla, mediante el producto adecuado de matrices, el coste de fabricación de cada producto en cada planta.**

a) $M=\begin{array}{c} \\ \text{Producto A} \\ \text{Producto B} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Acero} & \text{Plástico} & \text{Tela} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$

$P=\begin{array}{c} \\ \text{Acero} \\ \text{Plástico} \\ \text{Tela} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 7 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $MP=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 7 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 78 & 79 \\ 108 & 109 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \text{Producto A} \\ \text{Producto B} \end{array}$

La matriz *MP* da el coste de cada producto en cada una de las plantas.

81. **Lucía y Carmen son dos autónomas que trabajan para dos empresas. El número de horas semanales que dedican a cada una de ellas se refleja en la siguiente tabla:**

	Empresa 1	Empresa 2
Lucía	15	20
Carmen	16	22

Por otra parte, según los contratos que han firmado con las empresas, cobrarán a razón de 25 euros la hora con la empresa 1 y 35 euros por hora con la empresa 2.

a) **Describe mediante dos matrices *A* y *B* las horas semanales de trabajo y el precio por hora, respectivamente.**

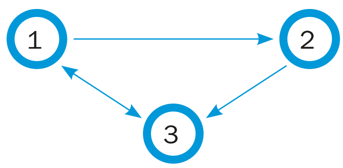
b) **Calcula el producto *AB* e indica qué representa.**

a) $A = \begin{array}{r} \\ \text{Lucía} \\ \text{Carmen} \end{array} \begin{array}{c} \text{Empresa 1} \quad \text{Empresa 2} \\ \begin{pmatrix} 15 & \quad 20 \\ 16 & \quad 22 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{r} \\ \text{Empresa 1} \\ \text{Empresa 2} \end{array} \begin{array}{c} €/\text{h} \\ \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 6 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1075 \\ 1170 \end{pmatrix}$

La matriz *AB* representa los ingresos semanales de Lucía y Carmen entre las dos empresas. Así, Carmen ganará 1075 € y Lucía 1170 €.

82. **Este diagrama muestra los enlaces entre tres páginas web. Por ejemplo, en él se advierte que es posible navegar de la página 1 a la página 3 mediante un solo clic, pero no es posible navegar de la página 3 a la página 2 del mismo modo.**



La matriz de incidencia *M* de este grafo se define de la siguiente manera: si existe un enlace directo entre la página web *i* y la *j*, escribiremos $m_{ij} = 1$; en caso contrario, $m_{ij} = 0$.

a) **Construye la matriz de incidencia *M*.**

b) **Calcula M^2 y explica su significado.**

a) La matriz de incidencia es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz M^2 permite averiguar si es posible ir de una página web a otra mediante 2 clic. Por ejemplo, es posible ir mediante 2 clic de la página. 1 y la 3, la 2 y la 1 y la 3 y la 2.

83. **Una empresa vende por internet camisetas de tres modelos, *M*1, *M*2 y *M*3, y en tres tallas, *S*, *M* y *L*. Los precios de cada modelo son 15, 20 y 25 euros, respectivamente. Las existencias a comienzos del mes de junio en el almacén del proveedor vienen dadas por la siguiente matriz:**

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & M & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2000 & 7000 & 400 \\ 1500 & 3000 & 200 \\ 1800 & 2500 & 700 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ M1 \\ M2 \\ M3 \end{array}$$

El pasado mes de junio fue el más fuerte de la temporada y se vendió el 70 % del total de existencias a comienzo del mes del modelo *M*1, el 50 % del *M*2 y el 80 % del *M*3. ¿Cuántas camisetas vendió de cada talla y qué ingresos obtuvo por la venta de cada uno de los modelos?

$$0,70 \cdot (\,2000\ \ 7000\ \ 400\,) = (\,1400\ \ 4900\ \ 280\,)$$

$$0,50 \cdot (\,1500\ \ 3000\ \ 200\,) = (\,750\ \ 1500\ \ 100\,)$$

$$0,80 \cdot (\,1800\ \ 2500\ \ 700\,) = (\,1440\ \ 2000\ \ 560\,)$$

Del modelo M1 vendió 1400de la talla S, 4900 de la talla M y 280 de la talla L.
Del modelo M2 vendió 750 de la talla S, 1500 de la talla M y 100 de la talla L.
Del modelo M3 vendió 1440 de la talla S, 2000 de la M y 560 de L.
Los ingresos por renta se obtienen multiplicando las ventas por los precios. Así:

$$\begin{pmatrix} 1400 & 4900 & 280 \\ 750 & 1500 & 100 \\ 1440 & 2000 & 560 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126\,000 \\ 43\,750 \\ 75\,600 \end{pmatrix}$$

Por tanto, obtuvo unos ingresos de 126 000 por las rentas del modelo M1, 43 750 € por las del modelo M2 y 75 600 € del modelo M3.

84. **La matriz de codificación de un mensaje es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y recibes este mensaje de amor cifrado:**

$$(32\ 15\ \ 14)(36\ 9\ \ 7)(34\ \ 0\ \ 19)(40\ \ 25\ \ 0)(23\ \ 5\ \ 12)(35\ \ 26\ \ 0)$$

¿Te atreves a descifrarlo? ¿Cuál es el mensaje oculto?

Para descifrar el mensaje necesitamos previamente calcular la matriz inversa de M.

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I|M^{-1})$$

Luego,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicamos la matriz inversa M^{-1}, que es la matriz de decodificación, por el mensaje cifrado expresado en una matriz por columnas. Así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 36 & 34 & 40 & 23 & 35 \\ 15 & 9 & 0 & 25 & 5 & 26 \\ 14 & 7 & 19 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 15 & 15 & 6 & 9 \\ 15 & 9 & 0 & 25 & 5 & 26 \\ 14 & 7 & 19 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

El mensaje en forma de texto alfabético, utilizando la tabla de enigma es:
"contigo soy feliz".

EBAU

86. **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **Justifica cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcula el resultado:** A^2, $A - B$ **y** AB **y** AB^t.

b) **Halla la matriz** X **tal que**

$$A^t + BX = 3B$$

Andalucía

a) A es una matriz de orden 2×3 y B es de orden 3×2.

- $A^2 = A_{2\times3} \cdot A_{2\times3}$ no existe.
- $A - B = A_{2\times3} - B_{3\times2}$ no existe
- $AB = A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2}$ sí existe.

  Luego,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $AB^t = A_{2\times3} \cdot B^t_{2\times3}$ no existe.

b) A^t es de orden 3×2 y $3B$ también es de orden 3×2. Por tanto, BX tiene que ser de orden 3×2 y, como B es de orden 3×2, entonces X tiene que ser una matriz cuadrada 2×2.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$A^t + BX = 3B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c+1 & d \\ a & b+1 \\ a+c+1 & b+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c+1=0 & \Rightarrow c=-1 \\ d=3 & \\ a=3 & \\ b+1=0 & \Rightarrow b=-1 \\ a+c+a=3 & \leftarrow \text{Comprobamos:} \begin{cases} 3-1+1=3 \ \checkmark \\ -1+3+1=3 \ \checkmark \end{cases} \\ b+d+1=3 & \end{cases}$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

87. Sean: $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$.

a) **¿Para qué valores de *x* e *y* se cumple *AB* = *C*?**

b) **Calcula, si existe, la matriz inversa de *C*.**

Aragón

a) $AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x-1-2y & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-1-2y=2 \\ x-4y=-3 \end{cases} \Rightarrow x = -3+4y$$

luego, $-2(-3+4y)-1-2y=2 \Rightarrow y = \dfrac{3}{10}$.

Sustituyendo, resulta: $x = \dfrac{-9}{5}$

Los valores son. $x = \dfrac{-9}{5}$, $y = \dfrac{3}{10}$.

b) Aplicaremos el método de Gauss-Jordan para ver si existe la matriz inversa de *C*. Así:

$$(C|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -9 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to 2F_2 + 9F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 9 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to 19F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 38 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & -19 & 9 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{19}F_2]{F_1 \to \frac{1}{38}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -8/38 & -6/38 \\ 0 & 1 & -9/19 & -2/19 \end{array}\right) = (I|C^{-1})$$

Por tanto, la matriz inversa de *C* es:

$$C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

88. **Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&5\\a&b\end{pmatrix}$, encuentra los valores de los parámetros *a* y *b* para los que conmuten.**

Castilla-La Mancha

Las matrices A y B conmutan sin $AB=BA$.

$$\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&5\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\a&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+3a&5-3b\\3+a&15+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&8\\a+3b&3a+b\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+3a=16 & \to \quad a=5\\ 5+3b=8 & \to \quad b=1\\ 3a=a+3b & \\ 15+b=3a+b & \end{cases}\qquad \text{Comprobación:}\begin{cases}3+51=5+3 & \checkmark\\ 15+1=15+1 & \checkmark\end{cases}$$

Los valore son: $a=5,\quad b=1$.

89. **Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&2&b\\0&1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$ e I_3, se pide, justificando las respuestas:**

a) **Hallar el valor de *b* para el que no existe A^{-1}.**

b) **Para *b* = 1 , hallar la matriz *X* que verifica $AX=A^3-I_3$.**

Extremadura

a) La respuesta a este apartado es mucho más sencilla utilizando determinantes que se verá en la unidad 2. No obstante, ahora utilizaremos el método de Gauss-Jordan para su resolución.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&b&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3\to F_3-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&b&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&-4&3-2b&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3+4F_2]{F_1\to F_1-2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&b&1&-2&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&3-2b&-2&4&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3\to\frac{F_3}{3-2b}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&b&1&-2&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{-2}{3-2b}&\frac{4}{3-2b}&\frac{1}{3-2b}\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1-bF_3}{}^{(*)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{3-2b}&\frac{-6}{3-2b}&\frac{-b}{3-2b}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{-2}{3-2b}&\frac{4}{3-2b}&\frac{1}{3-2b}\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

(*) Esta transformación solo se puede realizar si $3-2b\neq0$, es decir, si $b\neq\frac{3}{2}$.

En consecuencia, solo existe la matriz inversa de A si $b\neq\frac{3}{2}$ y su expresión es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3-2b} & \frac{-6}{3-2b} & \frac{-b}{3-2b} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3-2b} & \frac{4}{3-2b} & \frac{1}{3-2b} \end{pmatrix}$$

b) Para $b = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$AX = A^3 - I \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(A^3 - I) \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(A^3 - I) \Rightarrow IX = A^{-1}(A^3 - I) \Rightarrow$$
$$X = A^{-1}(A^3 - I)$$

Calculemos, pues, la potencia A^3. Así:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A^3 - I) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

90. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

Calcula las matrices *B* – C y *AB.* Encuentra los valores de *a, b* y *c* que verifican *B* – C = *AB*.

Galicia

- $B - C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix}$
- $B - C = AB \Rightarrow \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ 1-c = 1-a \\ -1+c = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = c = 2$

Por tanto, $a = 2$, $c = 2$ y $b \in \mathbb{R}$.

91. Sean: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

***a)* Determina la matriz C^{40}.**

***b)* Calcula la matriz *X* que verifica *XA* + 3*B* = *C*.**

Comunidad de Madrid

a) $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = I$

$C^3 = CC^2 = CI = C$

$\vdots$

Luego, $C^n = \begin{cases} C, \text{si } n \text{ esimpar.} \\ I, \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

Por tanto, $C^{40} = I$

b) $XA + 3B = C \Rightarrow XA = C - 3B \Rightarrow (XA)A^{-1} = (C - 3B)A^{-1} \Rightarrow X(AA^{-1}) = (C - 3B)A^{-1} \Rightarrow$

$XI = (C - 3B)A^{-1} \Rightarrow X = (C - 3B)A^{-1}$

Calculemos la matriz inversa de A mediante el método de Gauss-Jordan. Así:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to (-1)F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = (C - 3B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

92. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

***a)* Justifica $(AB)^{-1}$.**

***b)* Calcular $AB^t - A^tB$.**

***c)* Resolver la ecuación $B^t X + A^t B = A^t$.**

Comunidad Valenciana

a) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Utilizaremos el método de Gauss-Jordan para hallar la matriz inversa de *AB*. Así:

$$(AB|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 8 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to -F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{y}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 8F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) = (I|(AB)^{-1})$$

Luego,

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $AB^t = A^tB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$

c) $B^tX + A^tB = A^t \Rightarrow B^tX = A^t - A^tB \Rightarrow B^tX = A^t(I-B) \Rightarrow (B^t)^{-1}(B^tX) = (B^t)^{-1}(A^t(I-B)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left((B^t)^{-1}B^t\right)X = (B^t)^{-1}(A^t(I-B)) \Rightarrow IX(B^t)^{-1}(A^t(I-B)) \Rightarrow X = (B^t)^{-1}(A^t(I-B))$

Calculemos, pues, la matriz inversa de B^t.

$$(B^t|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(I|(B^t)^{-1}\right). \text{ Luego,}$$

$$(B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

93. Un fabricante de automóviles que produce dos modelos, Record y Astrid, almacena la producción en tres naves. En la primera nave tiene 150 vehículos del modelo Record y 120 vehículos del modelo Astrid. En la segunda guarda 80 Record y 140 Astrid. Finalmente, en la tercera nave almacena 250 Record y 125 Astrid. Este mes, el precio de los automóviles Record es de 6 520 €, mientras que cada Astrid vale 8 130 €. Esta información está recogida en estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 6520 \\ 8130 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

***a)* ¿Qué representa la matriz *BA*? Calcúlala.**

***b)* ¿Qué representa la matriz *BAP*? Calcúlala.**

Cataluña

La matriz *A* representa el número de vehículos de los modelos, Record y Astrid, almacenados en cada una de las tres naves. Es decir:

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Nave 1} \\ \text{Nave 2} \\ \text{Nave 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Record} & \text{Astrid} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mientras que *P* indica el precio de cada modelo Record y Astrid. Así:

$$P = \begin{pmatrix} 6520 \\ 8130 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Record} \\ \text{Astrid} \end{array}$$

a) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 & 385 \end{pmatrix}$

La matriz *BA* representa el número total de vehículos Record y Astrid, respectivamente, almacenados entre las tres naves.

b) $BAP = \begin{pmatrix} 480 & 385 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6520 \\ 8130 \end{pmatrix} = (6\,259\,650)$

Por tanto, BAP representa el precio total de todos los vehículos almacenadas en las tres naves.

94. **Sean:** $A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. **Calcula:**

a) A^2-B^2.

b) $(A-B)(A+B)$.

c) $C^{-1}C^t-I$.

Navarra

a)

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & -5\\ -5 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -5\\ -5 & -5\end{pmatrix}$$

b) $(A-B)(A+B)=\left[\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0\\ -10 & -5\end{pmatrix}$$

Observa que los resultados de los apartados *a)* y *b)* son distintos porque $AB\neq BA$.

c) Calcularemos la matriz inversa de C mediante el método de Gauss-Jordan.

$$(C|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2-3F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to -\frac{1}{2}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1\to F_1-2F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2\end{array}\right)=(I|C^{-1})$$

Luego,

$$C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$C^{-1}\cdot C^t-I=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

95. **Sean:** $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}10 & 11\\ 4 & 7\end{pmatrix}$

a) **Determina la matriz inversa de la matriz *I* + *B*, siendo *I* la matriz identidad de orden 2.**

b) **Halla las matrices *X* e *Y* que verifican:**

País Vasco

a) Sea $M=I+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

Entonces,

$$\left(M|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to F_2-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&0\\0&3&-1/2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\to\frac{1}{3}F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&0\\0&1&-1/6&1/3\end{array}\right)=\left(I|M^{-1}\right)$$

Luego, $M^{-1}=\left(I+B\right)^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}$

b) $\begin{cases}AX+BY=C\\ AX=Y\end{cases}$; restando, resulta:

$$BY=C-Y\Rightarrow BY+Y=C\Rightarrow(B+I)Y=C$$

$$(B+I)^{-1}\left((B+I)Y\right)=(B+I)^{-1}\cdot C\Rightarrow(B+I)^{-1}(B+Y)Y=(B+I)^{-1}C\Rightarrow IY=(B+I)^{-1}C\Rightarrow Y=(B+I)^{-1}C$$

Luego,

$$Y=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10&11\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11/2\\-1/3&1/2\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$AX=Y\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}Y\Rightarrow(A^{-1}A)X=A^{-1}Y\Rightarrow IX=A^{-1}Y\Rightarrow X=A^{-1}Y$$

Calculemos, pues, la matriz inversa de A.

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to\frac{1}{2}F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&0\\0&1&0&1\end{array}\right)=\left(I|A^{-1}\right)$$

Es decir,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

En consecuencia.

$$X=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&11/2\\-1/3&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2&11/4\\-1/3&1/2\end{pmatrix}$$

96. Sean: $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&a\\a&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

***a)* Calcula A^{-1}.**

***b)* Determina el valor del parámetro $B+C=A^{-1}$.**

***c)* Halla el valor del parámetro a para que $A+B+C=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.**

Región de Murcia

a) Utilizaremos el método de Gauss-Jordan para hallar la matriz inversa de A.

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\2&1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_2-2F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&-1&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to -F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&-1&2\end{array}\right)=\left(I|A^{-1}\right)$$

Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $B + C = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$

c) $A + B + C = 3I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$

97. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

***a)* Calcula A^2 y A^3.**

***b)* Ten en cuenta los resultados de *a)* y calcula A^{15}.**

***c)* ¿Existe alguna matriz *X* (distinta de la nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?**

La Rioja

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = A$

$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A^2 = A$

b) $A^{15} = A$ ya que $A^n = A,\ \forall n \in \mathbb{N}$

c) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$AX = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -2a-c & -2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ -2a - c = 0 \\ -2b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ 2b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2a \\ d = -2b \end{cases}$$

Verifican esa igualdad todas las matrices de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a, b \neq 0 \\ a, b \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

98. Se consideran las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

***a)* Calcula $A^2 - BC^t$.**

***b)* Resuelve la ecuación $XA + B = C$.**

Islas Baleares

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$BC^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$A^2 - BC^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1})C - B) \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(C - B) \Rightarrow$

$IX = A^{-1}(C - B) \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$

En primer lugar, calcularemos la matriz inversa de A mediante el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + 3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

