3 Trigonometría

1 El ángulo y su medida

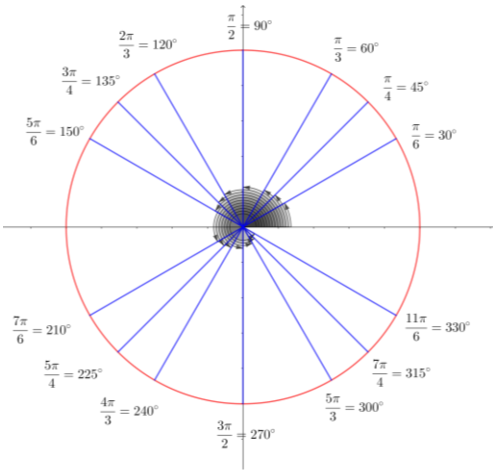
1. Expresa en radianes los ángulos de 30°, 45°, 60° y 90°. Haz lo mismo para sus suplementarios: los que difieren con ellos en 180° y los que suman con ellos 360°. Represéntalos sobre los ejes usando un programa de geometría dinámica.

$$30° = \frac{\pi}{6}\text{rad};\ 45° = \frac{\pi}{4}\text{rad};\ 60° = \frac{\pi}{3}\text{rad};\ 90° = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

$$150° = \frac{5\pi}{6}\text{rad};\ 135° = \frac{3\pi}{4}\text{rad};\ 120° = \frac{2\pi}{3}\text{rad};\ 90° = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

$$210° = \frac{7\pi}{6}\text{rad};\ 225° = \frac{5\pi}{4}\text{rad};\ 240° = \frac{4\pi}{3}\text{rad};\ 270° = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$$

$$330° = \frac{11\pi}{6}\text{rad};\ 315° = \frac{7\pi}{4}\text{rad};\ 300° = \frac{5\pi}{3}\text{rad};\ 270° = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$$



2. Calcula el ángulo que forman las agujas de un reloj a las dos y cuarto. Expresa el resultado en grados y radianes.

A las dos y cuarto, el ángulo que forman es: $22°30'$

3. Deduce fórmulas para la longitud de arco y para el área del sector circular si la amplitud del ángulo central correspondiente está expresada: *a)* En grados sexagesimales; *b)* En radianes.

a) En grados sexagesimales: $\frac{L}{360°} = \frac{s}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi R}{360°} = \frac{s}{\alpha} \Rightarrow s = \frac{\pi R\alpha}{180°}$

b) En radianes: $\frac{L}{2\pi} = \frac{s}{\alpha} \Rightarrow \frac{2\pi R}{2\pi} = \frac{s}{\alpha} \Rightarrow s = R\alpha$

Para el área del sector circular operamos de igual forma:

a) en grados sexagesimales: $\frac{A}{360°} = \frac{S}{\alpha} \Rightarrow \frac{\pi R^2}{360°} = \frac{S}{\alpha} \Rightarrow S = \frac{\pi R^2\alpha}{360°}$

b) en radianes: $\frac{A}{2\pi} = \frac{S}{\alpha} \Rightarrow \frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{S}{\alpha} \Rightarrow S = \frac{R^2\alpha}{2}$

2 Trigonometría del triángulo rectángulo

4. El seno de un ángulo vale $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$. Calcula el resto de sus razones trigonométricas.

$\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\text{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$; $\sec\alpha = \frac{5}{4}$; $\text{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$

5. Calcula el seno y la tangente de un ángulo β cuyo coseno vale $\cos\beta = \frac{1}{3}$.

$\text{sen}\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\beta = 2\sqrt{2}$

6. Determina las razones trigonométricas del ángulo α, cuya tangente es $\text{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

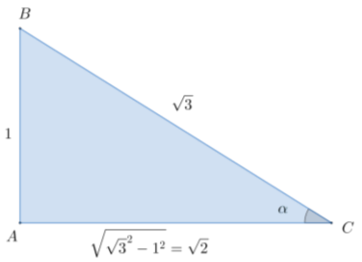
Aplicando una de las relaciones pitagóricas, tenemos:

$$\sec^2\alpha = 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por la relación entre seno, coseno y tangente: $\text{sen}\alpha = \text{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Por último, las inversas son: $\text{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}; \text{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. La cosecante del ángulo α vale $\sqrt{3}$. Calcula el resto de sus razones trigonométricas.



$$\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3};\ \text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cosec}\alpha = \sqrt{3};\ \sec\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2};\ \text{cotg}\alpha = \sqrt{2}$$

8. Si $\sec\alpha = 5$, calcula el $\text{sen}\alpha$ y la $\text{tg}\alpha$.

$\text{tg}\alpha = 2\sqrt{6}$; $\text{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

3 Razones de 30°, 45° y 60°

9. Medidas de un cartabón. Calcula la longitud de los catetos de un cartabón cuyos ángulos miden 30°, 60° y 90°, y cuya hipotenusa tiene una longitud de 13,8 cm.

El cateto mayor del cartabón mide 12 cm.

El cateto menor mide 6,9 cm.

10. Calcula la longitud exacta de la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 5 cm. A partir de dicho valor, calcula el área del hexágono. (Recuerda que $A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$).

$ap = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$

El área del hexágono es: $\frac{75\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$

3 Trigonometría

4 Resolución de triángulos rectángulos

11. Señal de tráfico de peligro por fuerte pendiente. Halla el ángulo de elevación de una rampa en la que aparece una señal de tráfico de peligro por fuerte pendiente del 21 %.

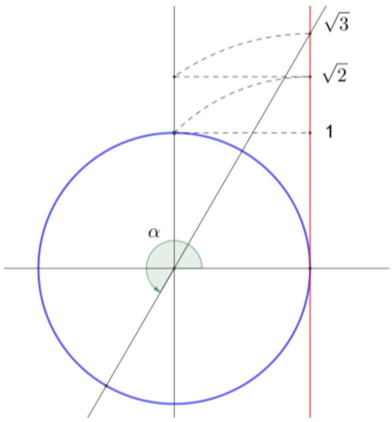
El ángulo: $11°51'35"$

12. Norma DIN 476. Los tamaños de las hojas de papel tipo DIN 476 presentan una relación entre sus dimensiones igual a la raíz cuadrada de 2. Halla el ángulo formado entre la diagonal y el lado mayor de una hoja de papel de tipo DIN A4.

El ángulo que nos piden es: $35°16'$

5 Razones de un ángulo cualquiera

13. Sabiendo que $tg\,\alpha = \sqrt{3}$, y que $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, dibuja el ángulo α y calcula el resto de sus razones trigonométricas.



Aplicando las relaciones pitagóricas, y teniendo en cuenta el cuadrante:

$$\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha = 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 \Rightarrow \sec\alpha = -2 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

El seno se calcula con la relación tipo cociente:

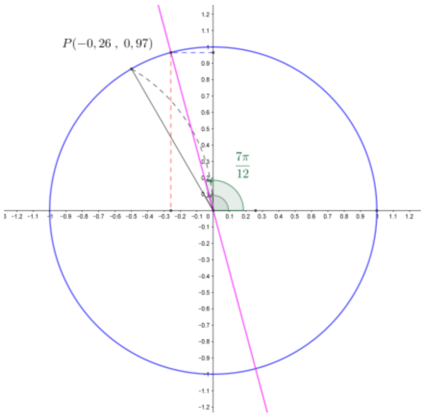
$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow sen\alpha = tg\alpha \cdot \cos\alpha = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y las inversas son: $cosec\alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$; $\quad cotg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

14. Usa un programa de geometría dinámica para dibujar una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Sobre ella representa el ángulo $\frac{7\pi}{12}$, y mide las coordenadas del punto correspondiente de la circunferencia. A partir de dichos valores calcula las razones trigonométricas de $\frac{7\pi}{12}$.

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 0,97; \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -0,26;\quad tg\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -3,73;\quad cotg\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -0,27$$

$$cosec\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1,035;\quad \sec\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -3,86$$



6 Reducción al primer cuadrante

15. Sabiendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{5}{13}$, calcula $\cos(\pi-\alpha)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ y $\cos(-\alpha)$.

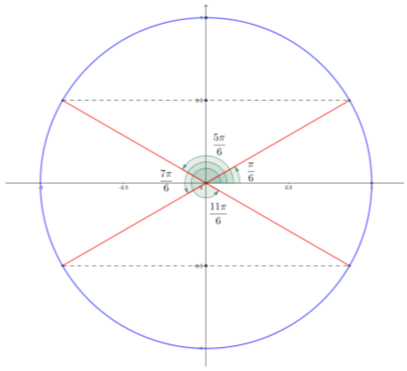
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{5}{13};\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{5}{13};\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\frac{5}{13}$$

16. Si el ángulo α de la actividad anterior pertenece al 4º cuadrante, calcula $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{5}{12}$$

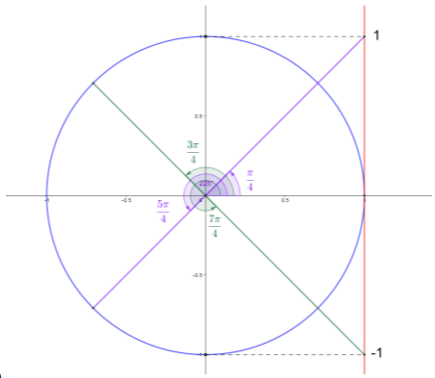
17. Determina todos los ángulos del intervalo $[0,2\pi)$ para los que $4\cdot sen^2\alpha=1$

$$4\operatorname{sen}^2\alpha=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{6}\\ \alpha=\frac{5\pi}{6}\end{cases}\\ \operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{7\pi}{6}\\ \alpha=\frac{11\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$



18. Determina todos los ángulos de la primera vuelta (entre 0 y 2π) para los que $\operatorname{tg}^2\alpha=1$.

$$\operatorname{tg}^2\alpha=1\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\pm1\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{4}\\ \alpha=\frac{5\pi}{4}\end{cases}\\ \operatorname{tg}\alpha=-1\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{3\pi}{4}\\ \alpha=\frac{7\pi}{4}\end{cases}\end{cases}$$



19. Calcula en función de las razones de α: $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Por las relaciones de reducción al primer cuadrante, sabemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha;\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

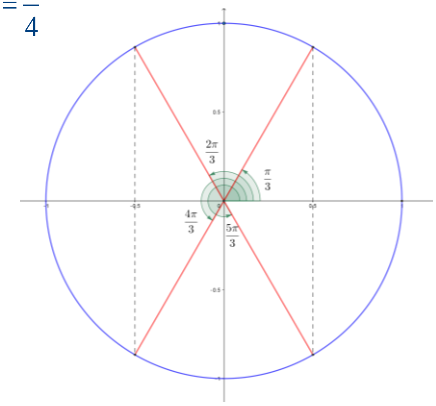
Por tanto, $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha+(-\cos\alpha)-\cos\alpha=-3\cos\alpha$

20. La ecuación de un movimiento armónico simple viene dada por $x = 3\cos(\pi t)$. Determina el valor de la posición en los instantes: $t = 0,5$ s, $t = 0,75$ s, $t = 1$ s y $t = 1,25$ s.

t	0,5	0,75	1	1,25
$x = 3\cos(\pi t)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx -2{,}12$	$3\cos(\pi) = -3$	$3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \approx -2{,}12$

21. Determina los ángulos de la primera vuelta para los que $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{3} \\ \alpha = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \\ \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{3} \\ \alpha = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$



7 Suma y diferencia de ángulos

22. Calcular las razones trigonométricas de 105° expresándolo como suma de 60° + 45° y como resta de 150° – 45°. Comprueba que obtienes el mismo resultado.

$$105° = 60° + 45° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}105° = \text{sen}(60° + 45°) = \text{sen}60°\cos45° + \cos60°\text{sen}45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \cos105° = \cos(60° + 45°) = \cos60°\cos45° - \text{sen}60°\text{sen}45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \text{tg}105° = \text{tg}(60° + 45°) = \frac{\text{tg}60° + \text{tg}45°}{1 - \text{tg}60°\cdot\text{tg}45°} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$105° = 150° - 45° \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}105° = \text{sen}(150° - 45°) = \text{sen}150°\cos45° - \cos150°\text{sen}45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \cos105° = \cos(150° - 45°) = \cos150°\cos45° + \text{sen}150°\text{sen}45° = \frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \text{tg}105° = \text{tg}(150° - 45°) = \frac{\text{tg}150° - \text{tg}45°}{1 + \text{tg}150°\cdot\text{tg}45°} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{3} - 1}{1 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 1} = \frac{-\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3} \end{cases}$$

23. Calcula las razones trigonométricas exactas de $\dfrac{13\pi}{12}$, expresando el ángulo como suma de $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}$.

$\operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $\cos\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg}\dfrac{13\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

24. Calcular la expresión $\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x$ en función de las razones trigonométricas de x y h

$\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}x\cdot\cos h+\cos x\cdot\operatorname{sen}h-\operatorname{sen}x=\cos x\cdot\operatorname{sen}h-\operatorname{sen}x\cdot(1-\cos h)$

25. Calcula $A=\operatorname{sen}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$ en función de las razones de α y determina el valor de α para el que $A=\sqrt{2}$.

Para que el valor de A sea $\sqrt{2}$, $\operatorname{sen}\alpha=1\Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k.$

26. Halla una expresión equivalente para cada una de las siguientes expresiones:

a) $\cos(x+y)+\cos(x-y)$ *b)* $\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)$

c) $\operatorname{sen}(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x-y)$ *d)* $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$

a) $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cdot\cos x\cdot\cos y$

b) $\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos y$

c) $\operatorname{sen}(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x-y)=(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y)\cdot(\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y)$

d) $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=(\cos x+\operatorname{sen}y)\cdot(\cos x-\operatorname{sen}y)$

8 Ángulos doble y mitad

27. Si $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{2}$ con $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ determina las razones $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos2\alpha$ y $\operatorname{tg}2\alpha$.

$\operatorname{sen}2\alpha=\dfrac{-4}{5}$; $\cos2\alpha=\dfrac{3}{5}$; $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{-4}{3}$

28. Determina las razones de 75° utilizando las fórmulas del ángulo mitad. Compara los resultados con los obtenidos en la Actividad resuelta 2 del epígrafe anterior.

Aplicando las relaciones para las razones del ángulo mitad, tenemos:

$$\operatorname{sen}75°=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Parece que el resultado está lejos del obtenido en la actividad resuelta 2,

$$\operatorname{sen}75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Sin embargo, podemos demostrar que los dos valores obtenidos son iguales:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}}{4}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}}{4}=\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)}}{4}=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 75°=+\sqrt{\frac{1+\cos 150°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{-\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Por último, la tangente:

$$\operatorname{tg}75°=\sqrt{\frac{1-\cos 150°}{1+\cos 150°}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}=2+\sqrt{3}$$

9 Fórmulas de factorización

29. Calcula estas expresiones utilizando las transformaciones de sumas en productos o de productos en sumas:

a) sen75° + sen15°   b) 4·sen45°·cos15°

$$a)\ \operatorname{sen}75°+\operatorname{sen}15°=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$b)\ 4\cdot\operatorname{sen}45°\cdot\cos 15°=\sqrt{3}+1$$

30. Simplifica, utilizando las fórmulas de factorización, la expresión $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ hasta llegar a una razón de un solo ángulo.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

10 Identidades trigonométricas

31. Demuestra la identidad $\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}(b-c)+\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}(c-a)+\operatorname{sen}c\cdot\operatorname{sen}(a-b)=0$.

$$\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}(b-c)+\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}(c-a)+\operatorname{sen}c\cdot\operatorname{sen}(a-b)=$$

$$=\operatorname{sen}a\cdot(\operatorname{sen}b\cdot\cos c-\cos b\cdot\operatorname{sen}c)+\operatorname{sen}b\cdot(\operatorname{sen}c\cdot\cos a-\cos c\cdot\operatorname{sen}a)+\operatorname{sen}c\cdot(\operatorname{sen}a\cdot\cos b-\cos a\cdot\operatorname{sen}b)=$$

$$=\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b\cdot\cos c-\operatorname{sen}a\cdot\cos b\cdot\operatorname{sen}c+\cos a\cdot\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}c-\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b\cdot\cos c+\operatorname{sen}a\cdot\cos b\cdot\operatorname{sen}c-\cos a\cdot\operatorname{sen}b\cdot\operatorname{sen}c$$

Observa que hay seis productos, tres con signo + y tres con signo –, que se anulan dos a dos. Por tanto, el resultado es 0, como se pretendía demostrar.

32. Usando las fórmulas de factorización, demuestra la identidad siguiente.

$$\frac{\cos(2x)-\cos(4x)}{\operatorname{sen}(3x)}=2\cdot\operatorname{sen}x$$

$$\frac{\cos(2x)-\cos(4x)}{\operatorname{sen}(3x)}=\frac{-2\cdot\operatorname{sen}\frac{2x+4x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{2x-4x}{2}}{\operatorname{sen}3x}=\frac{-2\cdot\operatorname{sen}3x\cdot\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{sen}3x}=-2\cdot(-\operatorname{sen}x)=2\cdot\operatorname{sen}x\ (q.e.d.)$$

33. Demostrar la identidad $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha\ (q.e.d.)$$

34. Demuestra que $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Ver actividad anterior.

35. Calcula $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$, de dos formas distintas. Para ello aplica las fórmulas para la suma y la resta de ángulos y utiliza las fórmulas de factorización.

Aplicando las fórmulas de la suma de ángulos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{sen}x=2\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos x=\cos x$$

Aplicando las fórmulas de factorización:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=2\cdot\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{6}+x+\frac{\pi}{6}-x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{6}+x}{2}=2\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos x=\cos x$$

36. A partir de la fórmula del coseno del ángulo doble se deducen las expresiones:

$$\operatorname{sen}^2x=\frac{1-\cos(2x)}{2}\ \text{ y }\ \cos^2x=\frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Haciendo uso de estas fórmulas, demuestra la identidad: $\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x=\frac{1-\cos(4x)}{8}$

$$\operatorname{sen}^2x\cdot\cos^2x=\frac{1-\cos(2x)}{2}\cdot\frac{1+\cos(2x)}{2}=\frac{1-\cos^2(2x)}{4}=\frac{1-\frac{1+\cos(4x)}{2}}{4}=\frac{2-1-\cos(4x)}{8}=\frac{1-\cos(4x)}{8}$$

11 Ecuaciones trigonométricas

37. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; b) $2\operatorname{sen}x-\sqrt{2}=0$ c) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0$ d) $2\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x-1=0$

a) $2\cos x+\sqrt{3}=0\Rightarrow \cos x=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=150°+360°k\\ x=210°+360°k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

b) $2\operatorname{sen}x-\sqrt{2}=0\Rightarrow \operatorname{sen}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=45°+360°k\\ x=135°+360°k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

c) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0\Rightarrow \operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=30°+360°k\\ x=210°+360°k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

En este caso se puede escribir el conjunto de soluciones como: $x=30°+180°k, k\in\mathbb{Z}$

d) $2\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x-1=0$

Esta es una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\operatorname{sen}x$. Aplicando la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$\operatorname{sen}x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases}\operatorname{sen}x=1\Rightarrow x=90°+360°k\\ \operatorname{sen}x=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=210°+360°k\\ x=330°+360°k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

38. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x=0$ b) $\operatorname{sen}\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\cos 3x\cdot(2\cos x-1)=0$

d) $\left(3\operatorname{tg}^2x-1\right)\cdot\left(\operatorname{tg}^2x-3\right)=0$

a) $\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\begin{cases}x=180°k\\ x=270°+360°k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

b) $\operatorname{sen}\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{19\pi}{36}+\dfrac{2\pi}{3}k\\ x=\dfrac{25\pi}{36}+\dfrac{2\pi}{3}k\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos 3x\cdot(2\cos x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=30°+60°k\\ \begin{cases}x=60°+360°k\\ x=300°+360°k\end{cases}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

d) $\left(3\operatorname{tg}^2x-1\right)\left(\operatorname{tg}^2x-3\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x=30°+180°k\\ x=150°+180°k\end{cases}\\ \begin{cases}x=60°+180°k\\ x=120°+180°k\end{cases}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$

39. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$ b) $\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 0$ c) $2\cos 2x + 3\operatorname{sen} x = 1$ d) $\cos 2x = 2\cos x - 1$

a) $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x \Rightarrow \begin{cases} x = 45° + 180°k \\ x = 135° + 180°k \end{cases} k \in Z$

b) $\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 180°k \\ x = 180° + 360°k \end{cases}$

c) $2\cos 2x + 3\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 90° + 360°k \\ \begin{cases} x = 194°28'39'' + 360°k \\ x = 345°31'21'' + 360°k \end{cases} \end{cases} k \in Z$

d) $\cos 2x = 2\cos x - 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 90° + 180°k \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 0° + 360°k \end{cases} k \in Z$

40. En los siguientes sistemas de ecuaciones, obtener las soluciones correspondientes a ángulos de la primera vuelta medidos en grados sexagesimales:

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + y = 1 \\ \cos^2 x + y = 1{,}5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ x + y = 60° \end{cases}$

a) Hay cuatro soluciones: $\left(30°, \frac{3}{4}\right), \left(150°, \frac{3}{4}\right), \left(210°, \frac{3}{4}\right), \left(330°, \frac{3}{4}\right)$.

b) Obtenemos: $2x = 60°;\ x = 30° \Rightarrow y = 30°$

12 Resolución de triángulos I

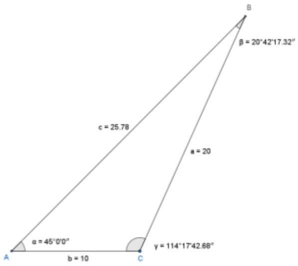
41. Resuelve el triángulo *ABC* en estos dos casos que se presentan a continuación:
a) Se conocen los ángulos *A* = 30° y *B* = 45°, además del lado *a* = 15.
b) Se conocen los ángulos *A* = 105° y *B* = 30°, además del lado *c* = 125.

a) C = 105°; $b \approx 21{,}21$; $c \approx 28{,}98$

b) C = 45°; $a \approx 170{,}75$; $b \approx 88{,}39$

42. Resuelve el triángulo *ABC,* conocidos sus lados *a* = 20, *b* = 10 y su ángulo *A* = 45°. ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

B = 20°42'; C = 114°18'; $c = 25,78$



43. Ángulo de elevación de una montaña. Un árbol de 10 m de altura proyecta una sombra de 17 m hacia abajo sobre la ladera de la montaña en la que se encuentra cuando el ángulo de elevación del sol sobre la horizontal es de 42°. Determina el ángulo de elevación de la ladera de la montaña.

El ángulo de elevación de la ladera es 42° – 26° = 16°.

44. Cuando los datos conocidos de un triángulo son dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, puede ocurrir que el problema no tenga solución o que tenga una o dos soluciones válidas. Analiza qué condiciones deben darse para que ocurra cada una de estas posibilidades.

Supongamos que los datos del triángulo son el ángulo A y los lados a y b. Del teorema del seno despejamos el $senB$:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen} B} \Rightarrow \text{sen} B = \frac{b \cdot \text{sen} A}{a}$$

- Si $b \cdot \text{sen} A > a$, la fracción resulta mayor que 1, lo que no es posible para $\text{sen} B$: el problema no tiene solución, ya que la longitud de a es demasiado pequeña para los valores de A y b.
- Si $b \cdot \text{sen} A = a$, la fracción resulta igual a 1, por lo que el ángulo B sólo puede ser 90°. El problema tiene una única solución, que además es un triángulo rectángulo.
- Si $b \cdot \text{sen} A < a$, entonces $\text{sen} B = \dfrac{b \cdot \text{sen} A}{a} < 1 \Rightarrow \begin{cases} B = \alpha \in I\, cuadrante \\ B = 180 - \alpha \in II cuadrante \end{cases}$
  - Si $\alpha < A$, lo que ocurre si $b < a$, sólo vale la solución del primer cuadrante, y el problema admite una única solución.
  - Si $\alpha > A$, lo que ocurre si $b > a$, valen los dos ángulos y el problema tiene dos soluciones.

13 Resolución de triángulos II

45. Resuelve el triángulo *ABC,* del que se conocen los lados *a* = 30, *b* = 80 y el ángulo *C* = 150°.

$c \approx 107,04$; $B \approx 21°57'$ $A = 8°3'$

46. Halla los ángulos del triángulo *ABC* conocidos sus lados:

a) *a* = 12 cm, *b* = 16 cm y *c* = 22 cm.
b) *a* = 8 cm, *b* = 19 cm y *c* = 14 cm.

a) $A = 32°9'26''$; $B = 45°12'26''$; $C = 102°38'8''$.

$b)A = 22°4'31''$; $B = 116°48'4''$; $C = 41°7'25''$.

47. Distancia entre cumbres. Un topógrafo situado en un llano observa los dos picos de una cordillera de modo que las visuales forman entre sí un ángulo de 60°18'. Si las distancias desde el punto de observación a los picos son de 1,3 km y 980 m respectivamente, calcula la distancia entre los dos picos.

La distancia entre los dos picos es $1178,12\,m$

48. Dos de los lados de una parcela de forma triangular miden 42 y 56 m. Si el ángulo comprendido por dichos lados mide 53°, halla la longitud del tercer lado y el área del triángulo.

$c \approx 45,5\,m.$ El área del triángulo vale: $939,2\,m^2$

49. Resuelve la actividad propuesta al comienzo de este epígrafe aplicando el teorema de las tangentes.

$0,924\,millas$

50. Los lados de un paralelogramo miden 4 y 7 cm respectivamente, y una de sus diagonales mide 5 cm. Calcula los ángulos del paralelogramo y la longitud de la otra diagonal.

$\alpha = 44°25'$; $\beta = 135°35'$; $d = 10,25\,cm.$

51. ¿Qué se obtiene al aplicar el teorema del coseno a un triángulo rectángulo?

Se obtiene el teorema de Pitágoras: Si el triángulo es rectángulo, recto en A, $\cos A = 0$, y entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A = b^2 + c^2 - 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

➢ ACTIVIDADES

❖ Ángulos. Razones trigonométricas. Segmentos goniométricos

52. El ángulo α mide 225° y β mide $\frac{4\pi}{5}$ rad. Calcula, en grados y en radianes, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $3\alpha-\frac{\beta}{2}$.

$$\alpha+\beta=\frac{41\pi}{20}=369^\circ;\ \alpha-\beta=\frac{9\pi}{20}=81^\circ;\ 3\alpha-\frac{\beta}{2}=\frac{67\pi}{20}=603^\circ$$

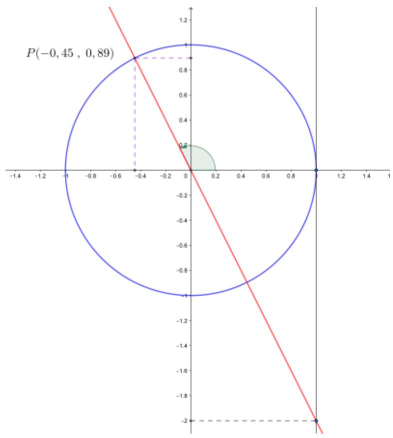
53. El seno de un ángulo del cuarto cuadrante vale $\frac{-3}{4}$. Determina todos los posibles valores del ángulo y calcula las demás razones.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}\alpha=\frac{-3}{4}\\ \alpha\in IV\text{ cuad.}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=360^\circ-\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right)+360^\circ k=360^\circ-48^\circ35'25''+360^\circ k=311^\circ24'35''+360^\circ k$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4};\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{-3\sqrt{7}}{7}$$

Las inversas son: $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{-4}{3};\ \sec\alpha=\frac{4\sqrt{7}}{7};\ \operatorname{cotg}\alpha=\frac{-\sqrt{7}}{3}$

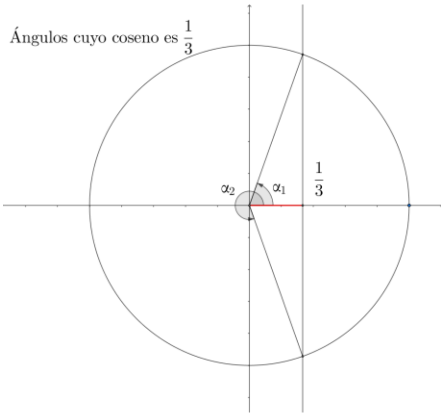
54. Dibuja el ángulo del segundo cuadrante cuya tangente vale −2. A continuación mide sus otros segmentos goniométricos y comprueba las medidas, mediante cálculos.

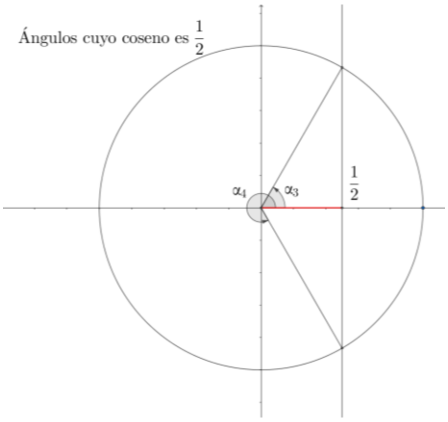


55. Demuestra que para todo $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$ se verifica $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha\ \text{(q.e.d.)}$$

56. Dibuja y calcula todos los ángulos de la primera vuelta que verifican la ecuación $\sec^2\alpha - 5\sec\alpha + 6 = 0$.





57. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 3 y uno de los catetos mide 2. Calcula las razones del menor ángulo agudo del triángulo, y determina su área.

Sus razones son: $\text{sen}B = \frac{2}{3}$; $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\text{tg}B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

El área del triángulo es: $A = \sqrt{5}$

❖ Reducción al primer cuadrante

58. Sabiendo que $\text{sen}\ \alpha = \frac{4}{5}\ y\ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ calcula la expresión:

$\cos(\pi - \alpha) + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \text{sen}(-\alpha) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

$$\cos(\pi - \alpha) + 2sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \text{sen}(-\alpha) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

59. Halla todos los posibles valores de α en los siguientes casos:

a) $\text{tg}^2\alpha = 3$ b) $\sec^2\alpha + \text{cosec}^2\alpha = 4$

a) $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 60° + 180°k \\ \alpha = 120° + 180°k \end{cases}$

b) $\sec^2\alpha + \text{cosec}^2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 45° + 90°k$

60. Calcula estas razones trigonométricas sin usar la calculadora. Más tarde puedes comprobar tus resultados con ella.

a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3};\cos\frac{7\pi}{6};\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$ b) $\cos 225°;\operatorname{cotg}330°;\operatorname{cosec}120°$

a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$$

b) $\cos 225°=\cos(180°+45°)=-\cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\operatorname{cotg}330°=\operatorname{cotg}(360°-30°)=-\operatorname{cotg}30°=-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec}120°=\operatorname{cosec}(180°-60°)=\operatorname{cosec}60°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

61. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo cuya medida en grados es 10^{10} o 10^{10} radianes.

- En el caso de 10^{10} grados, se trata de hacer la división entera entre 360°. El cociente resulta 27777777, y el resto 280°. Por tanto

$$\operatorname{sen}\left(10^{10°}\right)=\operatorname{sen}280°=-0,9848;$$
$$\cos\left(10^{10°}\right)=\cos 280°=0,17365$$
$$\operatorname{tg}\left(10^{10°}\right)=\operatorname{tg}280°=-5,6713$$

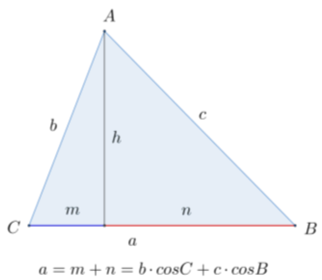
- En el caso de 10^{10} radianes, sus razones son:

$$\operatorname{sen}\left(10^{10}\right)=\operatorname{sen}(5,774247)=-0,487;$$
$$\cos\left(10^{10}\right)=\cos(5,774247)=0,873;$$
$$\operatorname{tg}\left(10^{10}\right)=\operatorname{tg}(5,774247)=-0,558.$$

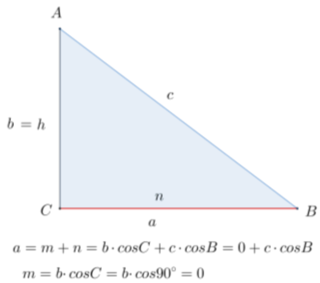
❖ Identidades trigonométricas. Fórmulas de adición

62. Demuestra que en todo triángulo ABC se verifica que $\begin{cases} a = b\cdot\cos C + c\cdot\cos B \\ b = a\cdot\cos C + c\cdot\cos A \\ c = a\cdot\cos B + b\cdot\cos A \end{cases}$. Distingue los casos en los que el triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

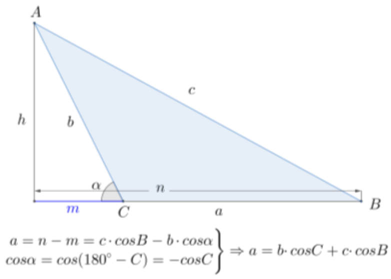
Si el triángulo es acutángulo:



Si el triángulo es rectángulo:



Si el triángulo es obtusángulo:



Para los otros dos lados, las demostraciones son análogas.

63. Demuestra que para todo ángulo $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$ se verifica $sec^2\alpha + cosec^2\alpha = sec^2\alpha \cdot cosec^2\alpha$

$$\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha} = \sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$$

64. Demuestra que para todo ángulo α se verifica $|\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha| = \sqrt{1+\operatorname{sen}2\alpha}$

$$\sqrt{1+\operatorname{sen}2\alpha} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} = \sqrt{(\operatorname{sen}\alpha + cos\alpha)^2} = |\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha|$$

65. Transforma en sumas o restas los siguientes productos:

a) $\operatorname{sen}5x\cdot\cos3x$ b) $\cos2x\cdot\cos4x$ c) $\operatorname{sen}3x\cdot\operatorname{sen}x$

a) $\operatorname{sen}5x\cdot\cos3x = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(5x+3x) + \operatorname{sen}(5x-3x)\right] = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}8x + \operatorname{sen}2x)$

b) $\cos2x\cdot\cos4x = \frac{1}{2}\left[\cos(2x+4x) + \cos(2x-4x)\right] = \frac{1}{2}(\cos6x + \cos(-2x)) = \frac{1}{2}(\cos6x + \cos2x)$

c) $\operatorname{sen}3x\cdot\operatorname{sen}x = -\frac{1}{2}\left[\cos(3x+x) - \cos(3x-x)\right] = \frac{1}{2}\left[-\cos4x + \cos2x\right] = \frac{1}{2}(\cos2x - \cos4x)$

66. Demuestra que para todo ángulo $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$ se verifica: $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\sec^2\alpha - 2}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$\frac{\sec^2\alpha - 2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 2}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 2}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 - 2}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$$

67. Aplica las fórmulas de adición para obtener las siguientes expresiones de reducción al primer cuadrante:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha = -1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0 \cdot \cos\alpha + (-1) \cdot \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha$

68. Demuestra que para todo $\alpha \neq \pi k$ se cumple que: $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha}\right) = \operatorname{cosec}\alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \cdot \frac{1+\cos\alpha + 1 - \cos\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \cdot \frac{2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$

69. Transforma en producto las siguientes sumas y restas:

a) $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x$ b) $\cos 3x - \cos 5x$ c) $\operatorname{sen} x + \cos x$ (utiliza el complementario)

a) $\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{3x+x}{2} \cdot \cos\frac{3x-x}{2} = 2 \cdot \operatorname{sen}2x \cdot \cos x$

b) $\cos 3x - \cos 5x = -2 \cdot \operatorname{sen}\frac{3x+5x}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{3x-5x}{2} = -2 \cdot \operatorname{sen}4x \cdot \operatorname{sen}(-x) = 2 \cdot \operatorname{sen}4x \cdot \operatorname{sen}x$

c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \cos\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

70. Demuestra que dados tres ángulos cualesquiera α, β y γ, se verifica:

$\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(\beta - \gamma) + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \cos\gamma \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 0$

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(\beta - \gamma) + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) + \cos\gamma \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$$
$$= \cos\alpha \cdot (\operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma - \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma) + \cos\beta \cdot (\operatorname{sen}\gamma \cdot \cos\alpha - \cos\gamma \cdot \operatorname{sen}\alpha) + \cos\gamma \cdot (\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta) =$$
$$= \cancel{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma} - \cancel{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma} + \cancel{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma} - \cancel{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma} + \cancel{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma} - \cancel{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma} = 0$$

71. Demuestra que, dados dos ángulos no suplementarios, α y β, se cumple:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\cancel{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\cancel{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

72. Si el triángulo ABC no es rectángulo, demuestra que: $\operatorname{tg}A=\dfrac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C-1}$

El ángulo A es el suplementario de B+C, de modo que:

$$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}\left(180°-\left(B+C\right)\right)=-\operatorname{tg}\left(B+C\right)=-\frac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{1-\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C}=\frac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C-1}$$

73. Obtén una expresión para las razones trigonométricas de la suma de tres ángulos.

- $$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)&=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}\gamma=\\&=(\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\cos\gamma+(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\operatorname{sen}\gamma=\\&=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma)&=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma-\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}\gamma=\\&=(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\cos\gamma-(\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta)\cdot\operatorname{sen}\gamma=\\&=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\gamma-\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma\end{aligned}$$

- $$tg(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}+\operatorname{tg}\gamma}{1-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}{\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$$

74. Demuestra que para todo ángulo α se verifica: $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$$\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=2\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

75. Demuestra que para todo ángulo $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\pi k$ se verifica: $\dfrac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$$\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

❖ Ecuaciones y sistemas trigonométricos

76. Resuelve $\forall x \in \mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

a) $2\cos(3x)+1=0$ b) $\mathrm{tg}^2(2x)=3$ c) $\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$ d) $\cos x-\mathrm{sen}\frac{x}{2}=0$.

a) $2\cos(3x)+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=40°+120°k \\ x=80°+120°k \end{cases} k \in Z$

b) $\mathrm{tg}^2(2x)=3 \Rightarrow \begin{cases} x=30°+90°k \\ x=60°+90°k \end{cases} k \in Z$

c) $\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2\pi k \\ x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \end{cases} \quad k \in Z$

d) $\cos x-\mathrm{sen}\frac{x}{2}=0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=60°+720°k \\ x=300°+720°k \end{cases} \\ x=540°+720°k \end{cases}$

77. Resuelve la ecuación $\mathrm{sen}(2x)=\mathrm{sen}x$.

$$\mathrm{sen}(2x)=\mathrm{sen}\ x \Rightarrow \begin{cases} x=\pi k \\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \\ x=\frac{5\pi}{3}+2\pi k \end{cases} \end{cases}$$

78. Resuelve la ecuación $\cos(2x)=1+\mathrm{sen}x$.

$$\cos(2x)=1+\mathrm{sen}\ x \Rightarrow \begin{cases} x=\pi k \\ \begin{cases} x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k \\ x=\frac{11\pi}{6}+2\pi k \end{cases} \end{cases}$$

79. Resuelve la ecuación $\mathrm{sen}(3x)+\mathrm{sen}(2x)=\mathrm{sen}x$.

$$\begin{cases} \begin{cases} x=60°+360°k \\ x=300°+360°k \end{cases} \\ x=180°+360°k \end{cases}$$

80. Halla todas las soluciones del intervalo (0,2π) para la ecuación bicuadrada $8\text{sen}^4 x - 10\text{sen}^2 x + 3 = 0$.

$$8\text{sen}^4 x - 10\text{sen}^2 x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = \dfrac{3}{4} \\ \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \\ \text{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \\ \text{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

81. Resuelve el sistema de ecuaciones trigonométricas: $\left.\begin{array}{r} \text{sen} x + \cos y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} \text{sen} x + \cos y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right) \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

82. Resuelve en el intervalo (0°, 360°) el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$

Las soluciones son:

$x = 90°; y = 30° \quad x = 390°; y = -270° \quad x = 390°; y = 90° \quad x = 450°; y = 30°$

Todas ellas corresponden a una de estas dos posibilidades: $x = 90°; y = 30°$ ó $x = 30°; y = 90°$.

83. Resuelve en el intervalo (0°, 360°) el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

$\begin{array}{l} x = 60° \\ y = 30° \end{array}$ $\begin{array}{l} x = 120° \\ y = -30° \end{array}$

❖ Resolución de triángulos

84. Resuelve gráfica y analíticamente los siguientes triángulos ABC:

a) a = 7,2 m, B = 72°, C = 54° (caso 1).
b) a = 3,5 m, b = 5 m, C = 15° (caso 2.1).
c) a = 6 m, b = 8 m, A = 22° 30′ (caso 2.2).
d) a = 6 m, b = 8 m, A = 48° 35′ 25′′ (caso 2.2).
e) a = 6 m, b = 8 m, A = 53° (caso 2.2).
f) a = 8 m, b = 6 m, A = 60° (caso 2.2).
g) a = 12 cm, b = 15 cm, c = 18 cm (caso 3).

a) $A = 54°;\ \begin{cases} b = 8,46\,\text{m} \\ c = 7,2\,\text{m} \end{cases}$

b) $c = 1,86\,\text{m}\ ;\ A = 29°13'\ ;\ B = 135°47'$

c) En este caso son válidas las dos soluciones, dando lugar a dos triángulos diferentes:

Triángulo 1	$a = 6\text{m}$	$b = 8\text{m}$	$c = \dfrac{6 \cdot \operatorname{sen}(126°49'12'')}{\operatorname{sen}(22°30')} \approx 12,55m$
	$A = 22°30'$	$B = 30°40'48''$	$C = 180° - (22°30' + 30°40'48'') = 126°49'12''$
Triángulo 2	$a = 6\text{m}$	$b = 8\text{m}$	$c = \dfrac{6 \cdot \operatorname{sen}(8°10'48'')}{\operatorname{sen}(22°30')} \approx 2,23m$
	$A = 22°30'$	$B = 149°19'12''$	$C = 180° - (22°30' + 149°19'12'') = 8°10'48''$

d) $B = 90°\ ;\ b = 8\text{m}\ ;\ a = 6\text{m}\ ;\ c = 5,29\,\text{m}\ ;\ C = 41°24'35''$.

e)

No hay triángulo con esos datos.

f)
$B = 40°30'19''\ ;\ C = 79°29'41''\ ;\ c = 9,08\,\text{m}$

g)
$A = 41°24'35'';\ \ B = 55°46'16'';\ \ C = 82°49'9''$

85. Utilizando la expresión que te parezca más adecuada, calcula el área de cada uno de los triángulos del ejercicio 84.

a) $A = 24,64\,\text{m}^2$

b) $A = 2,265\,\text{m}^2$

c) En este caso hay dos soluciones, por tanto, dos áreas diferentes:

$A = 19,21\,\text{m}^2$
$A = 4,41\,\text{m}^2$

d) $A = 15,87\,\text{m}^2$

e) No hay triángulo

f) $A = 23,6\,\text{m}^2$

g) $A = 89,29\,\text{m}^2$

86. Un triángulo *ABC* tiene los ángulos *A* = 75° y *B* = 60°, y el radio de su circunferencia circunscrita vale *R* = 15 cm. Calcula la longitud de sus lados y su área.

$$\begin{cases} a \approx 29\,\text{cm} \\ b \approx 26\,\text{cm} \\ c \approx 21,21\,\text{cm} \end{cases}$$

El área del triángulo vale: $A \approx 266,178\,cm^2$

87. Determina el radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular en función del lado del pentágono. Para ello calcula el valor del cos 72° sin utilizar la calculadora.

$$R = l \cdot \sqrt{\frac{\phi}{2\phi - 1}} = l \cdot \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

89. Los radios de dos circunferencias secantes valen 6 y 8 cm respectivamente. El ángulo que forman entre sí sus dos tangentes comunes mide 30°. Calcula la distancia entre los centros de las dos circunferencias.

$2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{cm}$

90. Las medidas en centímetros de los lados de un triángulo vienen expresadas por tres números enteros consecutivos. Sabemos que el valor del ángulo mayor es el doble del ángulo menor. Calcula los lados del triángulo, sus ángulos, su área y las longitudes de los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

Los lados del triángulo son 4, 5 y 6.

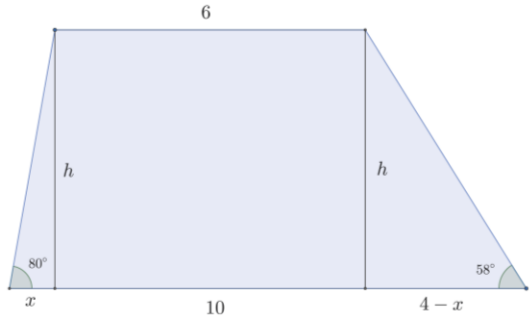
Los ángulos valen: $\alpha = 41°24'35''$; $2\alpha = 82°49'9''$; $180 - 3\alpha = 55°46'16''$

El área del triángulo vale: $A = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

Los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita:

$$r = \frac{\sqrt{7}}{2} \qquad R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

91. Las bases de un trapecio miden 10 y 6 cm respectivamente. Los ángulos que forma la base mayor con los lados del trapecio miden 80° y 58°. Calcula la altura del trapecio, la longitud de sus lados oblicuos y su área.



$h = 5\,\text{cm}$

$l_1 = 5{,}07\,\text{cm}$

$l_2 = 5{,}89\,\text{cm}$

$A = 40\,\text{cm}^2$

92. Resuelve el triángulo *ABC* conociendo las longitudes de sus tres alturas:
$h_a = 6\,\text{cm}$; $h_b = 4{,}8\,\text{cm}$ y $h_c = 4{,}5\,\text{cm}$

Pista: los lados del triángulo son inversamente proporcionales a sus alturas. Calcula los ángulos de un triángulo cualquiera que cumpla esa condición y, a partir de dichos ángulos, que son los mismos para todos los triángulos semejantes, obtén los lados del triángulo pedido.

Supongamos un triángulo cualquiera que verifique la relación anterior, por ejemplo, el que tiene área = 9. Entonces: $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3{,}75 \\ c = 4 \end{cases}$

Los ángulos de este triángulo son:

$$A = 45°24'20''$$
$$B = 62°53'17''$$
$$C = 71°42'23''$$

Como el triángulo resulta acutángulo:

Los lados del triángulo son $a = 5,06\,cm;\quad b = 6,32\,cm;\quad c = 6,74\,cm.$

93. El perímetro de un triángulo *ABC* mide 2*p* = 18 cm, y dos de sus ángulos son *A* = 57° y *B* = 70°. Calcula los lados del triángulo y su área.

$a = 5,86\,;\quad b = 6,56;\quad c = 5,58$

94. Del triángulo *ABC* conocemos los lados *a* = 6,9 cm y *b* = 8,4 cm y el radio de la circunferencia circunscrita, R = 6 cm. Calcula los ángulos, el tercer lado *c* y el área del triángulo.

<table>
<tr><td rowspan="2">Triángulo 1</td><td>$a = 6,9$</td><td>$b = 8,4$</td><td>$c = 2R \cdot \text{sen}C = 11,8$</td><td rowspan="2">$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \frac{6,9 \cdot 8,4 \cdot 11,8}{24} = 28,5$</td></tr>
<tr><td>$A = 35°6'$</td><td>$B = 44°26'$</td><td>$C = 100°28'$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Triángulo 2</td><td>$a = 6,9$</td><td>$b = 8,4$</td><td>$c = 2R \cdot senC = 1,95$</td><td rowspan="2">$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \frac{6,9 \cdot 8,4 \cdot 1,95}{24} = 4,71$</td></tr>
<tr><td>$A = 35°6'$</td><td>$B = 135°34'$</td><td>$C = 9°20'$</td></tr>
</table>

95. Tres lados de un cuadrilátero *ABCD* miden *AB* = 3 cm, *AD* = 5 cm y *BC* = 5 cm. Las diagonales del cuadrilátero miden *AC* = 7 cm y *BD* = 6 cm. Calcula la longitud del cuarto lado del cuadrilátero y la medida de los cuatro ángulos.

$A + B + C + D = 93°49' + 120° + 66°27' + 79°44' = 360°$

96. Calcula el área del espacio que hay entre tres círculos tangentes exteriores dos a dos, de radios 2, 3 y 4 cm.

$\text{Área} = 1,27\,\text{cm}^2$

❖ Aplicaciones

97. Descomposición de una fuerza. Una fuerza viene representada por un vector de 15 unidades de longitud que forman un ángulo de 53° con el eje *X*. Calcula sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas.

Las proyecciones valen 9,03 y 11,98 respectivamente.

98. Giro alrededor del origen. El punto P tiene como coordenadas (2,3). Determina las coordenadas del punto P’, que se obtiene al girar el punto P alrededor del origen un ángulo de: a) 90° y b) 45°.

a) El punto P’ tiene coordenadas $(-3, 2)$.

b) El punto P’ tiene coordenadas $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

99. Altura de una antena. Desde un punto situado a 20 m del pie de una antena se observa el punto más alto de esta con un ángulo de elevación de 35°, con el teodolito situado en un trípode de 1,6 m de altura. Calcula la altura de la antena.

$h = 15,6 \text{ m}$

100. Longitud de una sombra. Si a primeros de agosto en la península ibérica el sol se eleva sobre el horizonte a razón de 15° cada hora y amanece a las siete de la mañana, calcula la sombra que proyectará un árbol de 15 m de altura sobre un terreno horizontal a las once de la mañana.

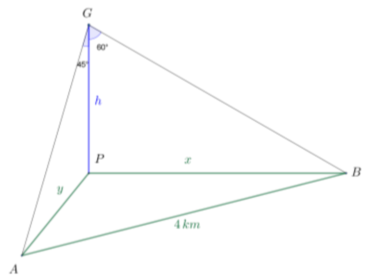
$8,66 \text{ m}$

101. Distancia de un barco a la costa. Un barco que navega próximo a la costa se observa desde el punto más alto de un faro bajo un ángulo de 1 rad. Si el faro se encuentra a 50 m sobre el nivel del mar, ¿a qué distancia de la costa se encuentra el barco?

$77,87 \text{ m}$

102. Altura de un globo. Desde un globo se observan dos puntos A y B sobre el terreno que se encuentran al sur y al este del mismo. Los ángulos de depresión de dichos puntos desde el globo son 45° y 60°, respectivamente. Si sabemos que la distancia entre los puntos A y B es de 4 km, ¿a qué altura se encuentra el globo?

$h = 2 \text{ km}$



103. Altura de una torre. La torre de un castillo se encuentra protegida por un foso, de modo que no se puede acceder hasta su pie. Medido con el teodolito desde el borde del foso, el ángulo de elevación del punto más alto de la torre vale 53°, y el ángulo de depresión del punto más bajo de la torre, 18°. Nos alejamos 20 m del borde del foso y volvemos a medir el ángulo de elevación de la torre, que ahora vale 37°. Calcula la anchura del foso y la altura de la torre teniendo en cuenta que el teodolito se encuentra en un trípode de 1,5 m de altura.

Los resultados son $x = 26,28 \text{ m};\ h = 34,87 \text{ m};\ h' = 8,54 \text{ m};\ H = 43,41 \text{ m}$

104. Distancia entre dos puntos no accesibles. Desde dos puntos A y B que distan entre sí 55 m y se encuentran en la misma orilla de un río se observan otros dos puntos P y Q situados en la orilla opuesta. Se han medido los ángulos $\widehat{ABP} = 28°$, $\widehat{ABQ} = 98°$, $\widehat{BAQ} = 30°$ y $\widehat{BAP} = 105°$. Calcula la distancia PQ.

$x = 69 \text{ m}$

105. Cálculo del desnivel. A una distancia de 90 m del pie de una antena de 60 m de altura se observa la antena bajo un ángulo de 30°. Halla el desnivel existente entre el punto de observación y la base de la antena.

El desnivel del punto de observación respecto de la base de la antena es:

$$h = 90 \cdot \text{sen}\left(11°24'35''\right) = 17{,}8\,\text{m}$$

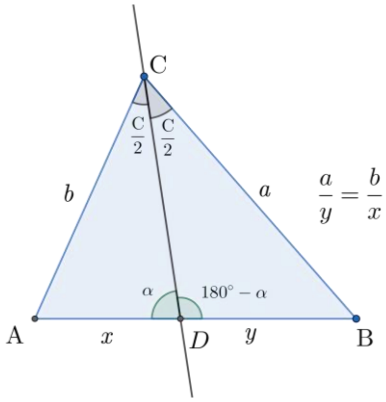
106. Altura de una estatua y su pedestal. Una estatua se encuentra colocada sobre un pedestal. Desde un punto A se observa el pie de la estatua con un ángulo de elevación de 10° y el punto más alto de la estatua con un ángulo de elevación de 22°. Si nos alejamos 10 m hasta el punto B, observamos el punto más alto de la estatua bajo un ángulo de 18°. Calcula la altura de la estatua y la de su pedestal.

La altura del pedestal es $h_P = 7{,}24\,\text{m}$

Y la altura de la estatua es $h_E = 9{,}36\,\text{m}$

107. Teorema de la Bisectriz. Aplicando el teorema del seno, demuestra el teorema de la bisectriz, el cual establece que: en todo triángulo, los segmentos determinados por la bisectriz de un ángulo sobre su lado opuesto son proporcionales a los lados que forman el ángulo.

Obsérvese la figura:



Aplicando el teorema del seno al triángulo ADC, tenemos:

$$\frac{b}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{x}{\text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)} \Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Y al aplicar el teorema del seno al triángulo BDC, tenemos:

$$\frac{a}{\text{sen}\left(180° - \alpha\right)} = \frac{y}{\text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{\text{sen}\left(180° - \alpha\right)}{\text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}$$

Como ángulos suplementarios tienen senos iguales,

$$\frac{\text{sen}\left(180° - \alpha\right)}{\text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\left(\frac{C}{2}\right)} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{b}{x}$$

108. Descomposición de una fuerza. Una fuerza viene representada por un vector de 15 unidades de longitud que forman un ángulo de 53° con el eje *X*. Calcula sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas.

Las proyecciones de la fuerza sobre los ejes vienen determinadas por 15 ·cos53°, sobre OX, y 15·sen53°, sobre OY. De modo que valen 9,03 y 11,98 respectivamente.

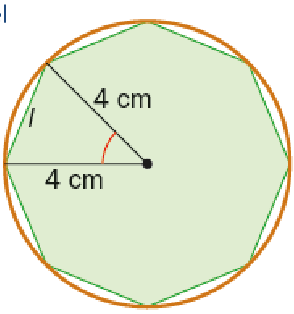
109. Giro alrededor de un punto. El punto *P* tiene coordenadas (2,3). Determina las coordenadas del punto *P’* que se obtiene al girar 90° en sentido horario el punto *P* alrededor del punto *Q* (6,1).

Las coordenadas del punto *P'* son (8,5).

110. Diagonales del hexágono. En un hexágono regular hay dos tipos de diagonales: uno de ellos corresponde al diámetro de la circunferencia circunscrita al hexágono; el otro, une dos vértices que están separados por un vértice intermedio. Calcula la longitud de esta última diagonal en función del lado del hexágono.

$d = l\sqrt{3}$

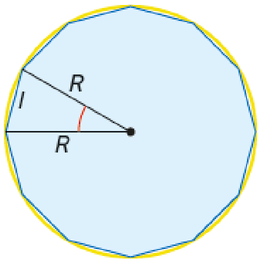
111. Lado del octógono regular. Calcula el lado y el área de un octógono regular sabiendo que el radio de su circunferencia circunscrita mide 4 cm.



El área del octógono es $32\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

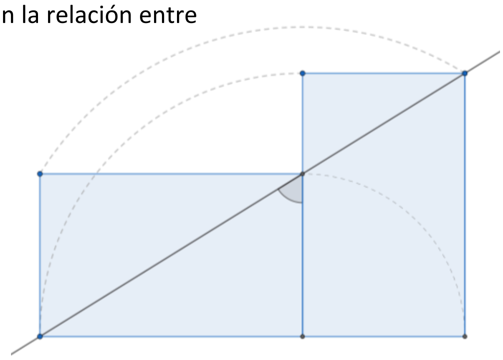
112. Lado del dodecágono regular. Determina la relación entre el lado de un dodecágono regular y el radio de su circunferencia circunscrita. A partir de dicha relación, calcula el área del dodecágono en función de su lado.

El área del dodecágono es: $3\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot l^2$



113. Rectángulos áureos. En la figura está representado un rectángulo áureo. Recibe este nombre porque la relación entre sus dimensiones es el número de oro. Demuestra que todo rectángulo áureo genera, al girarlo 90° alrededor de uno de sus vértices, otro rectángulo tal que la diagonal del rectángulo original incide en el vértice superior del rectángulo girado. Determina las razones trigonométricas del ángulo que forma la diagonal con el lado menor del rectángulo áureo.

Para probar que la diagonal del primer rectángulo incide en el vértice del girado, hay que probar que la relación entre las dimensiones del rectángulo original, a y b, coincide con la relación entre b y a-b. Es decir,



$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{a-b}{b}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{a}{b}-1}$$

Si llamamos r a la relación entre a y b: $r=\frac{1}{r-1}\Leftrightarrow r^2-r-1=0$

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

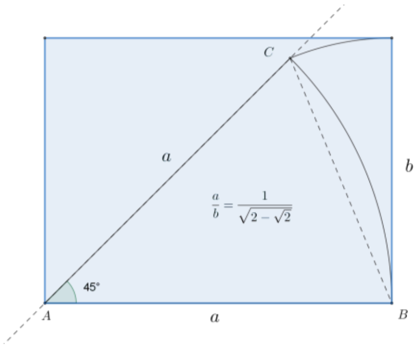
Como r es positivo, la única solución válida es $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$, es decir, se trata de un rectángulo áureo. La diagonal del rectángulo áureo vale: $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2\phi^2+b^2}=b\cdot\sqrt{\phi^2+1}$

Las razones trigonométricas del ángulo marcado son:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{d}=\frac{b\cdot\phi}{b\cdot\sqrt{\phi^2+1}}=\frac{\phi}{\sqrt{\phi^2+1}};\ \cos\alpha=\frac{b}{b\cdot\sqrt{\phi^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{\phi^2+1}};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\phi$$

114. Proporción Cordobesa. Un rectángulo cordobés es un rectángulo en el que la relación entre sus dimensiones es la llamada proporción cordobesa, $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, que no es otra que la que existe entre el radio de la circunferencia circunscrita y el lado de un octógono regular. Demuestra que, en efecto, la proporción cordobesa viene definida por el número indicado. Dibuja con regla y compás un rectángulo cordobés, uno de cuyos lados mida 4 cm.

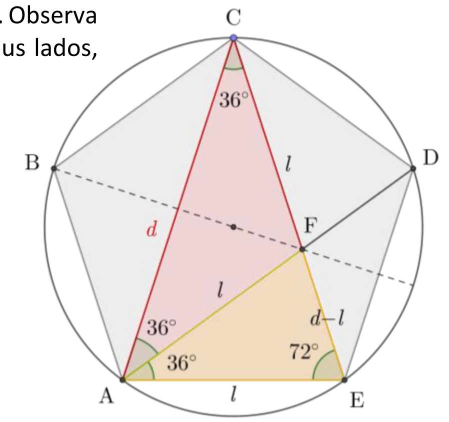
La relación entre el radio de la circunferencia circunscrita a un octógono y su lado se puede determinar a partir del teorema del coseno aplicado a un triángulo formado por un lado del octógono y dos radios. Como el ángulo que forman los dos radios es 45°, tenemos:



$$l^2=R^2+R^2-2\cdot R^2\cdot\cos 45°=R^2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\Rightarrow l=R\sqrt{2-\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{R}{l}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Para dibujar un rectángulo en proporción cordobesa, dado el lado mayor AB del rectángulo, se trazan las perpendiculares a dicho lado por sus extremos y se dibuja la bisectriz del ángulo recto formado en A. Se lleva la longitud del lado mayor desde A sobre esa bisectriz hasta el punto C. La longitud del segmento BC es el lado menor del rectángulo cordobés.

115. Número de oro. Demuestra que la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular es el número de oro $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A partir de dicha relación, calcula las razones trigonométricas de 36°.



En primer lugar, encontremos la relación entre la diagonal del pentágono regular y su lado. Observa la figura: Los triángulos *ACE* y *AEF* son semejantes. Estableciendo la proporción entre sus lados, tenemos:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AE}{EF}\Rightarrow\frac{d}{l}=\frac{l}{d-l}\Rightarrow\frac{d}{l}=\frac{1}{\frac{d}{l}-1}$$

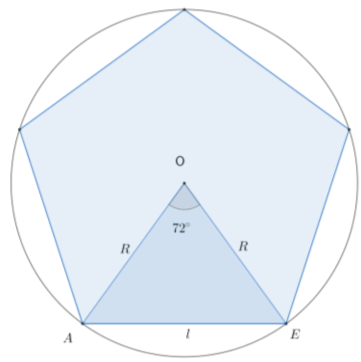
Si llamamos x a $\frac{d}{l}$, la proporción anterior se puede escribir:

$$x=\frac{1}{x-1}\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

Puesto que la segunda posibilidad es un número negativo, lo desechamos. Así pues, la relación entre la diagonal y el lado es el número de oro, $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Aplicamos a continuación el teorema del coseno al triángulo ACE:

$$d^2=d^2+l^2-2\cdot d\cdot l\cdot\cos 72°\Rightarrow 2\cdot d\cdot l\cdot\cos 72°=l^2\Rightarrow\cos 72°=\frac{l}{2d}=\frac{1}{2\phi}$$



Una vez determinado el valor de cos72°, aplicamos el teorema del coseno al triángulo AOE:

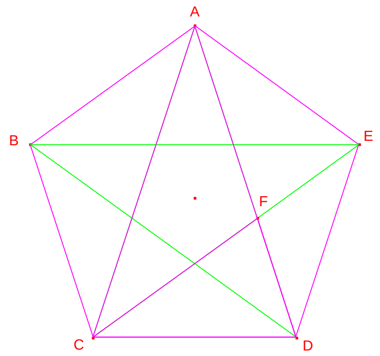
$$l^2=R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos 72°=2R^2\cdot(1-\cos 72°)=2R^2\left(1-\frac{1}{2\phi}\right)=R^2\cdot\frac{2\phi-1}{\phi}$$

Finalmente,

$$R=l\cdot\sqrt{\frac{\phi}{2\phi-1}}=l\cdot\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$$

❖ Un mundo matemático

1. Demuestra que la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular es el número de oro, φ. (Basarse en la semejanza de los triángulos ACD y CDF).



En el pentágono regular de la figura, el triángulo ACD tiene ángulos

CAD = 36° y ACD = CDA = 72°.

El triángulo CDF tiene ángulos FCD=36° y CDF = DFC=72°.

Por tanto, los dos triángulos son semejantes, y sus lados son proporcionales. Como tanto ACD como CDF son isósceles, los lados CD, CF y AF coinciden con el lado del pentágono. Así pues,

$$\frac{CD}{FD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{l}{d-l} = \frac{d}{l} \Rightarrow l^2 = d^2 - dl \Rightarrow 1 = \left(\frac{d}{l}\right)^2 - \frac{d}{l}$$

Si llamamos $\phi = \frac{d}{l}$, tenemos

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \Rightarrow \phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como el valor negativo no tiene sentido,

$$\frac{d}{l} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. Expresa en términos de φ las razones trigonométricas de 72°, 36° y 18°. (Aplicar el teorema de los senos al triángulo ACD y las relaciones del ángulo doble y ángulo mitad.)

En el triángulo ACD, podemos escribir:

$$\frac{d}{sen72°} = \frac{l}{sen36°} \Rightarrow \frac{sen72°}{sen36°} = \phi \Rightarrow \frac{2 \cdot sen36° \cdot cos36°}{sen36°} = \phi \Rightarrow cos36° = \frac{\phi}{2}$$

$$sen\ 36° = \frac{\sqrt{4-\phi^2}}{2} = \frac{\sqrt{3-\phi}}{2}$$

$$tg36° = \frac{\sqrt{3-\phi}}{\phi}$$

Las razones de 72° son, aplicando las fórmulas del ángulo doble:

$$sen72° = 2 \cdot sen36° \cdot cos36° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3-\phi}}{2} \cdot \frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{\phi+2}}{2}$$

$$cos72° = cos^2 36° - sen^2 36° = \frac{\phi^2}{4} - \frac{4-\phi^2}{4} = \frac{\phi^2-2}{2} = \frac{\phi-1}{2}$$

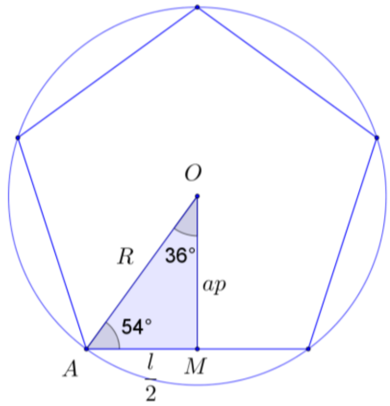
$$tg72° = \frac{\sqrt{\phi+2}}{\phi-1}$$

Las razones de 18° son, aplicando las fórmulas del ángulo mitad:

$$sen18° = \sqrt{\frac{1 - cos36°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\phi}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \phi}}{2} = \frac{\phi - 1}{2} = cos72°$$

$$cos18° = \sqrt{\frac{1 + cos36°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\phi}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \phi}}{2} = sen72°$$

$$tg18° = \frac{\phi - 1}{\sqrt{2 + \phi}}$$



3. Obtén, en función del lado, las medidas del radio y apotema del pentágono.

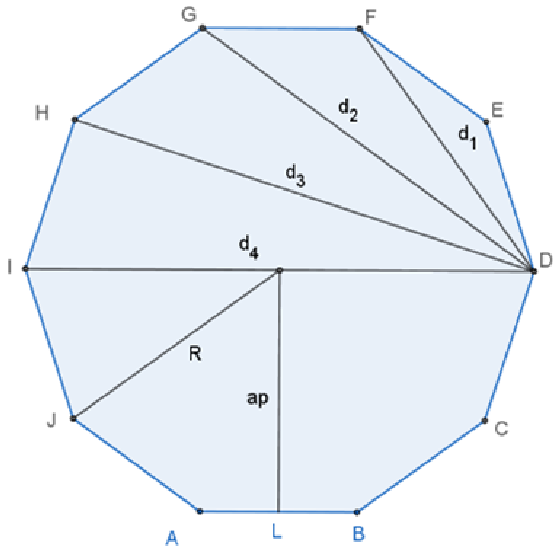
$$R \cong 0{,}85 \cdot l$$

$$ap \cong 0{,}688 \cdot l$$

4. Determina el valor del área del pentágono en función del lado.

$$A \cong 1{,}72 \cdot l^2$$

5. En el pentágono regular existe una única medida de las diagonales, pero en el decágono regular, hay cuatro diagonales con medidas diferentes. Calcula la relación entre cada diagonal del decágono y su lado.



$$d_1 = l \cdot \sqrt{2 + \phi}$$

$$d_2 = (1 + \phi) \cdot l$$

$$d_4 = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{2 - \phi}}$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{2 + \phi}{2 - \phi}} \cdot l$$

6. Por último, obtén el radio, la apotema y el área del decágono en función de su lado.

$$ap = \sqrt{\frac{2+\phi}{2-\phi}} \cdot \frac{l}{2}$$

$$A = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+\phi}{2-\phi}} \cdot l^2$$