10. Derivadas

2 Derivada de una función

1. Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados.

   a) $f(x)=3-x^2$, $P(-1,2)$ b) $f(x)=2x+5$, $P(1,7)$

a) La pendiente a la curva en dicho punto es 2.

b) La pendiente a la curva en dicho punto es 2.

2. Determina la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos indicados:

   a) $f(x)=3x^2+4x,\ P(1,7)$ b) $f(x)=x^3+1,\ P(0,1)$

a) La ecuación de la recta tangente a la curva es:
$10x-y-3=0$

b) La ecuación de la recta tangente a la curva es:
$y-1=0$

3 Tasas de variación

3. Costes y beneficios. Los ingresos, en millones de euros, de una empresa después de t años de funcionamiento se estiman por:

$$I(t)=0,2t^2+5t$$

a) Calcula la tasa de variación media de los ingresos entre los años primero y segundo de funcionamiento.
b) ¿A qué ritmo de crecimiento se estiman los ingresos al inicio del segundo año de funcionamiento?

a) La tasa de variación media entre los dos primeros años de funcionamiento es de 5,6 millones de euros.

b) El ritmo de crecimiento al inicio del segundo año es de 5,8 millones de euros.

4. Estudio de poblaciones. Observa los datos de la tabla siguiente, en la que figura la evolución de la población española en millones de habitantes. Halla la tasa de variación de variación media del crecimiento entre:

a) 1930 a 1991 b) 1991 a 2018 c) 1930 a 2018

Año	1930	1960	1991	2012	2018
Población	23,7	30,6	39,4	46,8	46,7

a) La tasa de variación media entre los años 1930 y 1991 fue de 257377 habitantes.

b) La tasa de variación media entre los años 1991 y 2018 fue de 270370 habitantes.

c) La tasa de variación media entre los años 1930 y 2018 ha sido de 261364 habitantes.

4 Técnicas de derivación

5. Calcula la derivada en los puntos indicados.

a) $f(x)=x+3\sqrt{x}$, x=2 b) $f(x)=2x-\frac{1}{x^3}$, x=-1

a) $f'(2)=1+\frac{3}{2\sqrt{2}}$

b) $f'(-1)=2+\frac{3}{1}=5$

6. Encuentra la ecuación de la recta normal a la curva $y=(x-1)(x^3-3x^2+1)$ en el punto de abscisa x=2.

La ecuación de la recta normal a la curva es: $x-3y-11=0$

7. Un tipo de tumor cancerígeno se puede modelar por una esfera de radio r. ¿A qué ritmo cambia el volumen con respecto al radio cuando r = 1 cm?

El volumen del tumor cambia a un ritmo con respecto al radio de $12{,}57\,cm^3$.

8. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=\frac{1}{4}x^2-2x-12$ en los puntos de intersección con los ejes.

En el punto $P_1(0,-12)$ la ecuación de la recta tangente es: $2x+y+12=0$

En el punto $P_2(-4,0)$ la ecuación de la recta tangente es: $4x+y+16=0$

En el punto $P_1(12,0)$ la ecuación de la recta tangente es: $4x-y-48=0$

9. Encuentra las derivadas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x-1}$ e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ f) $f(x)=\dfrac{2-x}{3-2x}$

a) $f'(x)=\dfrac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{-5}{(x-3)^2}$

c) $f'(x)=\dfrac{x^4+6x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$

d) $f'(x)=\dfrac{7}{(3x-1)^2}$

e) $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

f) $f'(x)=\dfrac{1}{(3-2x)^2}$

10. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ que pasan por el punto (-1,5).

Las ecuaciones de las rectas son: $x+y-4=0$ y $4x+y-1=0$

11. Calcula la derivada de $g(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x}$

a) Realizando previamente la división.
b) Utilizando la derivada del cociente.

$$g'(x)=1-\frac{6}{x^2}$$

12. Estudio científico. El efecto de introducir una toxina en una colonia de bacterias se puede modelar mediante la función $P(t)=\frac{12t+5}{t^2+2}$ donde P es la población de la colonia (en millones de individuos) al cabo de t horas de introducir la toxina. ¿A qué ritmo cambia la población una hora después de haber introducido la toxina? ¿En ese momento la población está aumentando o disminuyendo?

Una hora después de introducir la toxina la población cambia a un ritmo de 0,222222 millones. En ese momento la población está aumentando.

13. Halla los coeficientes a, b y c de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ sabiendo que pasa por el punto $P(2,5)$, y que $f'(2)=3$ y $f''(2)=2$.

Coeficientes: $a=1$, $b=-1$ y $c=3$.

14. Determina si la función $y=2x^3$ verifica $y''-y=0$.

En general no verifica esta ecuación.

5 Regla de la cadena o derivación compuesta

15. Aplica la regla de la cadena para derivar las funciones:

a) $f(x)=\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)^3$ b) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2x+5}}$ c) $f(x)=\frac{2x}{(3x-1)^2}$

a) $f'(x)=\frac{(x+2)^2\cdot(-3x^2-12-3)}{(x^2-1)^4}$

b) $f'(x)=\frac{5}{2(2x+5)^2}\sqrt{\frac{2x+5}{x}}$

c) $f'(x)=\frac{-6x-2}{(3x-1)^3}$

16. Calcula las derivadas primera y segunda de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^3-3x)^5$ b) $f(x)=\frac{3}{x^2}$ c) $f(x)=\sqrt{(1-x)}$

a) $f'(x)=5\cdot(x^3-3x)^4\cdot(3x^2-3)$

$f''(x)=(x^3-3x)^3\left[3x^5+210x^4-12x^3+270x^2+9x+180\right]$

b) $f'(x) = -6x^{-3}$

$f''(x) = 18x^{-4}$

c) $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}$

6 Derivada de las funciones logarítmica y exponencial

17. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x \cdot \mathbf{e}^{x-1}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x} = 1$.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} = e^{x-1}(x+1)$$

La ecuación de la recta tangente es: $2x - y - 1 = 0$

18. Calcula las siguientes derivadas:

a) $\boldsymbol{y} = \frac{1}{2-e^{-x}}$ b) $\boldsymbol{y} = 3x\mathbf{e}^{-2x}$ c) $\boldsymbol{y} = \ln\sqrt{\frac{2}{1-3\boldsymbol{x}}}$ d) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 e^{-x}$ e) $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} + \ln \boldsymbol{x})^4$

f) $\boldsymbol{y} = \log_3(\boldsymbol{x}^2)$ g) $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{1+\ln \boldsymbol{x}}$ h) $\boldsymbol{y} = \frac{e^x}{1-e^x}$ i) $\boldsymbol{y} = 3^{-x+2}$

a) $y' = \frac{-e^{-x}}{(2-e^{-x})^2}$

b) $y' = 3e^{-2x}(1-2x)$

c) $y' = \frac{3}{2-6x}$

d) $y' = xe^{-x}(2-x)$

e) $y' = 4 \cdot (x + \ln x)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

f) $y' = \frac{2}{x\ln 3}$

g) $y' = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$

h) $y' = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$

i) $y' = -3^{-x+2} \cdot \ln 3$

19. Velocidad de propagación. Según fuentes periodísticas, un rumor se propaga siguiendo la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{1+\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^{-kt}}$, donde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ es la proporción de personas de una población que lo conocen al cabo de $\boldsymbol{t}$ días, y $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{k}$ son constantes positivas.

a) Calcula $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ e interpreta el resultado.

b) Determina la velocidad de propagación del rumor.

c) Para *a*=10 y *k*=0,5. ¿Cuál es el ritmo de propagación del rumor al cabo de 12 horas?

a) A "largo plazo" el rumor lo conocerá toda la población, es decir, el 100 %.

b) La velocidad de propagación del rumor es la derivada $f'(t) \Rightarrow f'(t) = \dfrac{ake^{-kt}}{\left(1+ae^{-kt}\right)^2}$

c) El ritmo de propagación del rumor al cabo de 12 días es del 1,18 %.

7 Derivada de las funciones trigonométricas

20. Halla las derivadas de las funciones.

a) $y = x - 3\text{sen}x$ b) $y = \cos 2x - \text{sen}x$ c) $y = x\text{arctg}x$

a) $y' = 1 - 3\cos x$

b) $y' = -2\text{sen}2x - \cos x$

c) $y' = \text{arctg}x + \dfrac{x}{1+x^2}$

21. Halla los puntos de la función $f(x) = 2\text{sen}x + \text{sen}^2 x$ en los que la recta tangente es horizontal.

Los puntos de la forma $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ y $x_2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$,$k \grave{o} Z$ son los que tienen tangente horizontal a dicha función.

8 Funciones crecientes y decrecientes

22. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$ c) $f(x) = xe^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

a) $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$, y decreciente en $(0, 2)$.

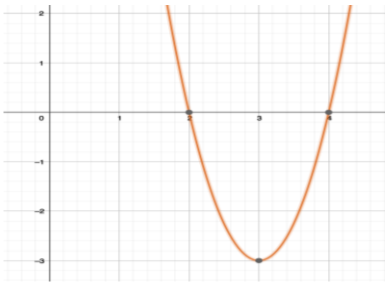
b) $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$, y decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$

c) $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

d) $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$ y decreciente en $(0, 2) y (2, +\infty)$.

e) $f(x)$ es creciente en todo R. Un esbozo de su gráfica es:

23. Se conoce la gráfica de la derivada *f´(x)* de una función *f(x)*. ¿En qué intervalos es creciente o decreciente dicha función?



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ y decreciente en $(2, 4)$.

9 Extremos relativos

24. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-12$ b) $f(x)=2x^3+6x^2+6x+5$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$

a) La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$. Además, tiene un mínimo relativo en $x=0$ y en $x=3$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

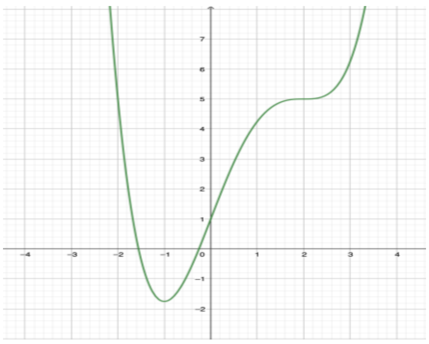
b) La función $f(x)$ es creciente en todo R y en $x=-1$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

c) La función $f(x)$ es decreciente en $\mathrm{R}-\{2\}$.

d) La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup(\sqrt{3}+\infty$ y creciente en $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ Además, tiene un mínimo relativo en $x=-\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x=\sqrt{3}$.

25. Esboza la gráfica de una función que cumple:

$f'(-1)=f'(2)=0$ $f'(x)<0,\ \text{si } x\in(-\infty,-1)$ $f'(x)>0, \text{si } x\in(-1,2)\cup(2,+\infty)$



26. Razona por qué la función $g(x)=1+(x-2)^3$ tiene un punto con derivada nula que no es extremo relativo.

$g(x)$ es creciente en todo R.

10 Máximos y mínimos absolutos

27. Encuentra los máximos y mínimos absolutos para las siguientes funciones e intervalos:

a) $f(x)=x^2+4x-5,\ [-1,4]$

b) $f(x)=2x^3+3x^2+2,\ [0,3]$

c) $f(x)=-x^2+2x,\quad [0,1]$

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3},\ [-1,1]$

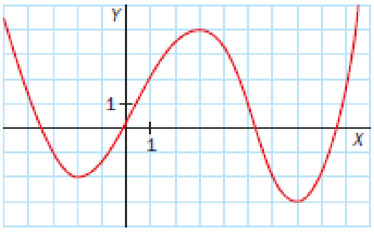
a) El punto $(-1,8)$ es mínimo absoluto y el $(4,27)$ máximo absoluto.

b) El valor mínimo es $f(0)=2$ y el máximo $f(3)=83$. Por tanto, el punto $(0,2)$ es mínimo absoluto y el punto $(3,83)$ máximo absoluto.

c) El valor mínimo es $f(0)=0$ y el máximo $f(1)=1$. Por tanto, el punto $(0,0)$ es mínimo absoluto y el punto $(1,1)$ máximo absoluto.

d) El valor mínimo es $f(0)=0$ y el máximo $f(-1)=f(1)=\dfrac{1}{4}$. Por tanto, el punto $(0,0)$ es mínimo absoluto y los puntos $\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$ máximos absolutos. (Ver gráfica).

28. Dibuja una función que tenga dos mínimos relativos, un máximo relativo y ningún máximo absoluto.



29. Prueba que la función $f(x)=4x^2+\dfrac{1}{x}$, para x>0, tiene un único extremo relativo y, que por tanto, este también es absoluto.

Hay un mínimo relativo y absoluto en $x=\dfrac{1}{2}$.

30. Inversiones. Una consultoría estima que la rentabilidad de una inversión depende de la cantidad invertida, en miles de euros, y que viene dada por $R(x)=-0{,}01x^2+0{,}1x+1, x>0$. Determina la cantidad que se debe invertir para maximizar la rentabilidad.

Debería invertir 5000 euros para obtener una rentabilidad máxima de 1250 euros.

31. En matemáticas y arquitectura se define la catenaria como aquella curva cuyo trazado sigue la forma que adquiere una cadena, cuerda o cable sujeta por sus dos extremos. También se utiliza en los ferrocarriles. La ecuación general de una catenaria es:

$$y = 0,5k\left(e^{x/k} + e^{-x/k}\right)$$

donde *k* es un parámetro que regula la apertura de la curva. Para *k*=2, calcula el mínimo absoluto.

El punto $(0,2)$ es el mínimo relativo y absoluto de esta curva catenaria.

11 Concavidad y puntos de inflexión

32. Determina los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las curvas:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$ b) $f(x) = x^2e^x$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

a) La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$. Por tanto, en $x = 0$ cambia de curvatura y el punto $(0,4)$ es de inflexión.

b) La función es convexa en $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right)$ y cóncava en $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right)$.

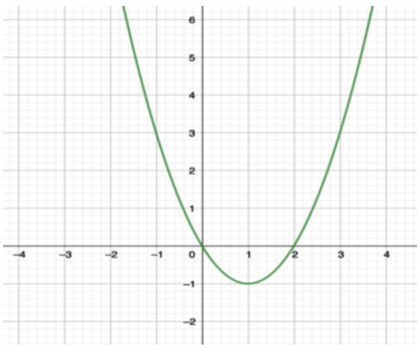
Luego, tanto en $x = -2-\sqrt{2}$ como en $x = -2+\sqrt{2}$ cambia de curvatura y, por tanto, son puntos de inflexión.

c) La función es convexa en $(-2, 0)$ y cóncava en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Como en $x = 0$ cambia de curvatura, entonces el punto (0,0) es un punto de inflexión.

33. Dibuja la gráfica de una función que tenga las siguientes características:

$f(0) = f(2) = 0$ $f'(x) < 0$ **si** $x < 1$ $f'(1) = 0$

$f'(x) > 0$, **si** $x > 1$ $f''(x) > 0$



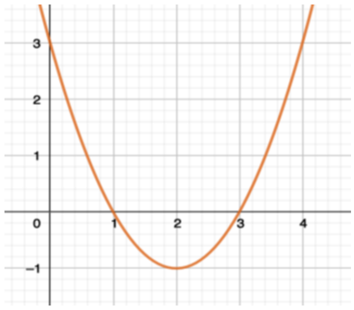
34. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de la función $f(x)=3x^4+x^3-1$

La función es convexa en $\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right)\cup(0,+\infty)$ y cóncava en $\left(-\frac{1}{6},0\right)$, como en $x=-\frac{1}{6}$ y $x=0$ cambia de curvatura la función, entonces ambos son puntos de inflexión.

35. Dada la función $f(x)=x^4+ax^3+x^2$, estudia cuando tiene ninguno, uno o dos puntos de inflexión, según los valores de a.

- Si $a<-\frac{8}{3}$ o $a>\frac{8}{3}$. Habrá dos puntos de inflexión .
- Si $-\frac{8}{3}<a<\frac{8}{3}$. No hay níngún punto de inflexión.

36. Esta es la gráfica de la derivada segunda de una función. Encuentra los intervalos de concavidad y convexidad, así como sus puntos de inflexión.

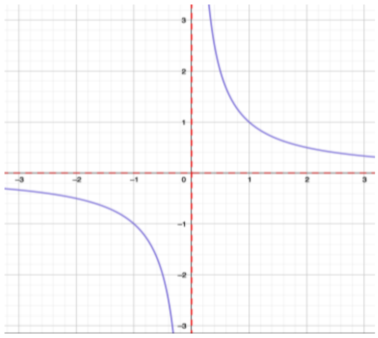


La función $f(x)$ es convexa en $(1,3)$ y cóncava en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. Además tiene dos puntos de inflexión en $x=1$ y $x=3$.

37. Analiza si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) La curva $y=\frac{1}{x}$ es cóncava si $x>0$ y convexa si $x<0$, y, por tanto, en $x=0$ tiene un punto de inflexión.

b) La función $f(x)=(x-3)^4$ cumple que $f''(3)=0$ y, por consiguiente, en $x=3$ tiene un punto de inflexión.

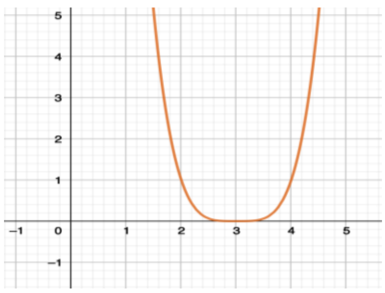


a) $y=\frac{1}{x}$ $\quad D(f)=\mathrm{R}-\{0\}$ $\quad y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$

$y''=\frac{2}{x^3}<0,\ si\, x<0$ y, por tanto, convexa.

$y''=\frac{2}{x^3}>0,\ si\, x>0$ y, por tanto, cóncava.

Sin embargo, en $x=0$ no hay punto de inflexión porque no está definida la función.(Observa su gráfica)



b) $f(x)=(x-3)^4$ $\quad D(f)=\mathrm{R}$ $\quad f'(x)=4(x-3)^3$, $f''(x)=12(x-3)^2$

Efectivamente $f''(3)=0$.

$f''(x)=12(x-3)^2>0,\ \forall x\in\mathrm{R}-\{3\}$ y, por tanto, es cóncava en todo R. Luego no tiene punto de inflexión en $x=3$. (observa su gráfica)

38. Determina los valores de a, b, c y d en la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que tiene un mínimo relativo en (2,4), máximo relativo en (4,2) y punto de inflexión en (3,3).

Tenemos, pues, un sistema de seis ecuaciones con cuatro incógnitas.

39. Estudio farmacológico. Se administra un medicamento a un paciente y, t horas después, la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-0,5t}$, $t \geq 0$, en miligramos por litro. Determina el valor máximo de la concentración en sangre e indica en qué momento se produce.

Al cabo de dos horas de la administración del medicamento se produce el valor máximo de concentración, $c(2) = 0,7358\, mg/l$.

40. Utiliza la derivada segunda para hallar los máximos y mínimos relativos de la curva

Mínimo relativo en $x = \frac{\pi}{2}$

Máximo relativo en $x = \frac{\pi}{6}$

Máximo relativo en $x = \frac{5\pi}{6}$

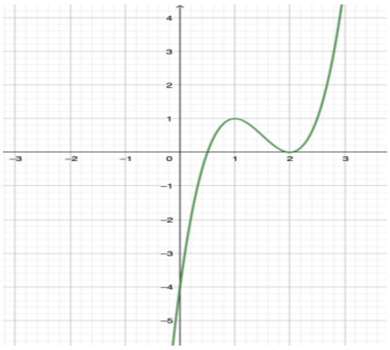
12 Representación gráfica de funciones

41. Calcula los elementos característicos y representa gráficamente las siguientes funciones:

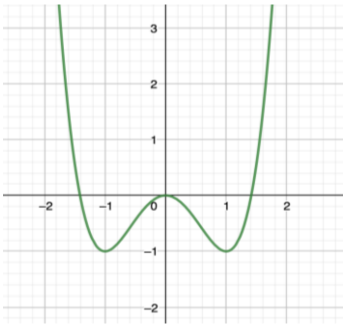
a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ b) $y = x^4 - 2x^2$ c) $y = 1 - \frac{1}{x}$

d) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ e) $y = x^2 + \frac{2}{x}$ f) $y = \frac{9x}{x^2 + 2}$

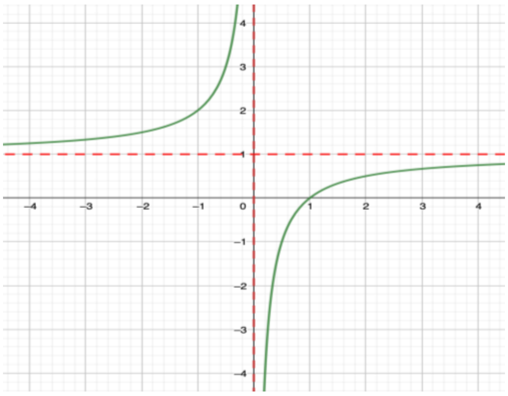
a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$



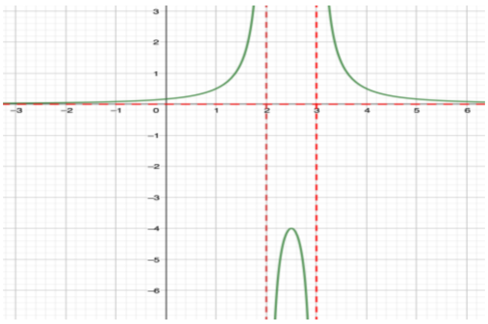
b) $y = x^4 - 2x^2$



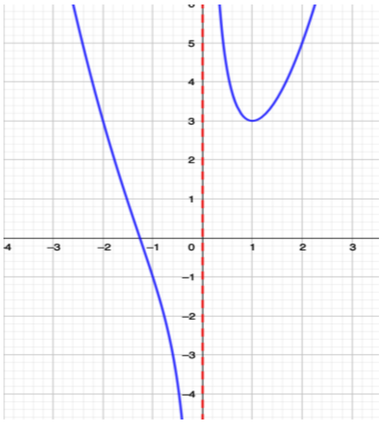
c) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$



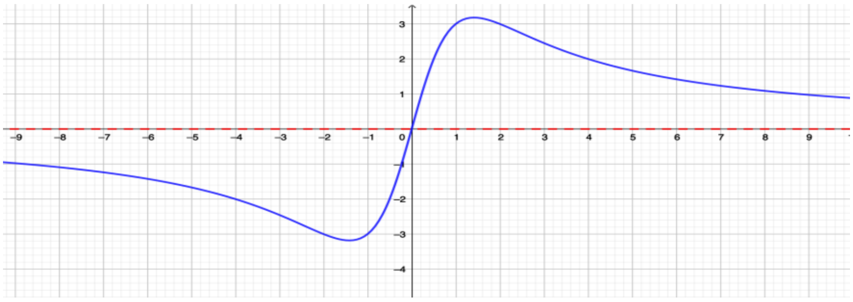
d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$



e) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$



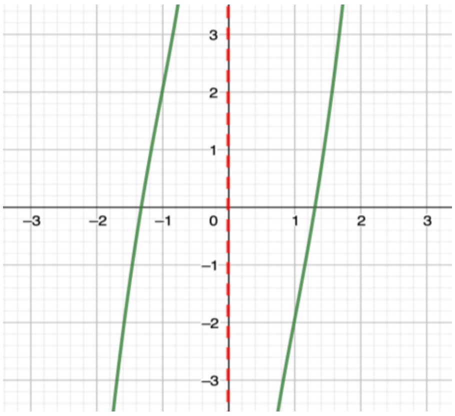
f) $y = \dfrac{9x}{x^2 + 2}$



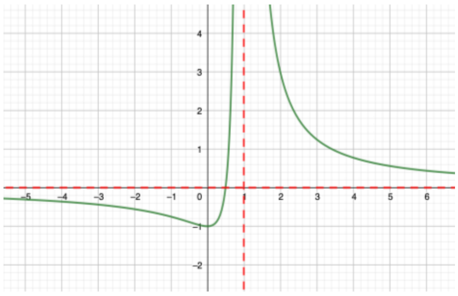
42. Calcula el dominio, los puntos de corte, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y efectúa un dibujo aproximado de las funciones:

a) $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$ b) $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$ c) $y = x^3 e^{-x}$

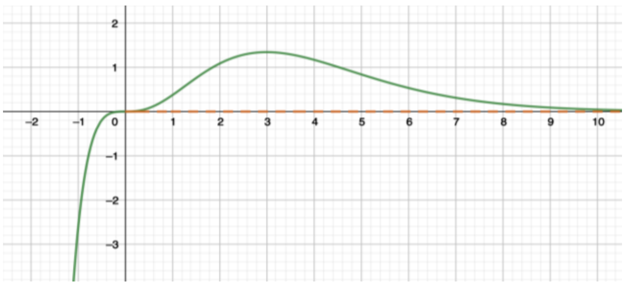
a) $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$



b) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$



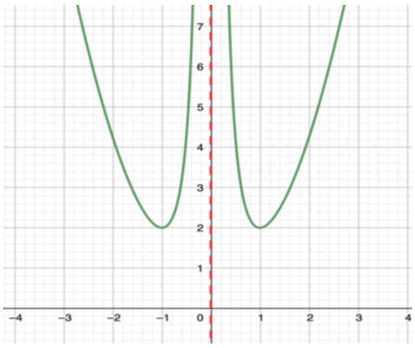
c) $\boldsymbol{y=x^3e^{-x}}$



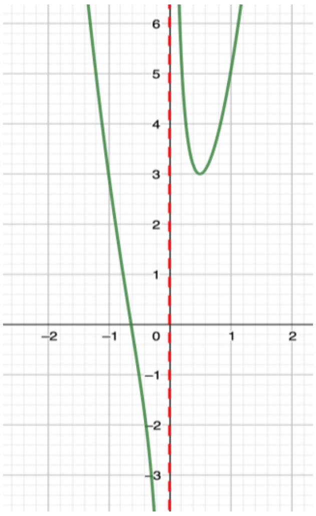
43. Calcula el dominio, los puntos de corte, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y efectúa un dibujo aproximado de las funciones:

a) $\boldsymbol{y=x^2+\dfrac{1}{x^2}}$ **b)** $\boldsymbol{y=4x^2+\dfrac{1}{x}}$ **c)** $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{e^x-1}}$

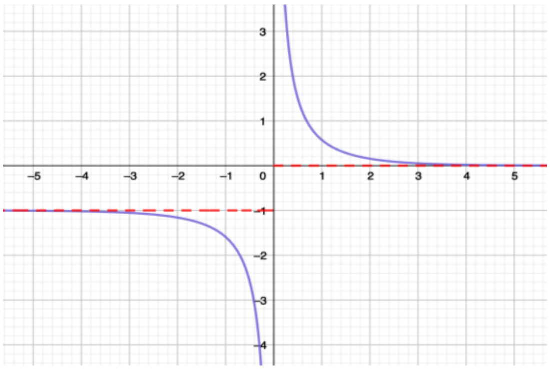
a) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$



b) $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$



c) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

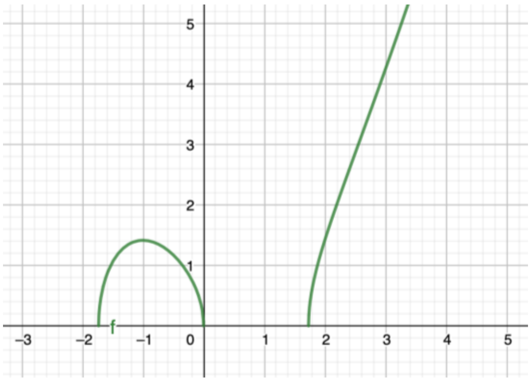


44. Calcula los elementos necesarios para dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

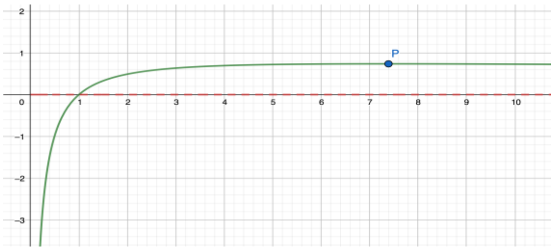
a) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$ b) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ c) $y = \cos x - \cos^2 x$

d) $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$ e) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$ f) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

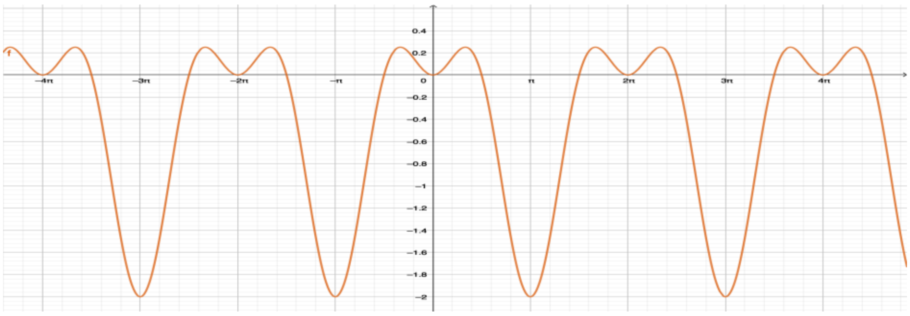
a) $y=\sqrt{x^3-3x}$



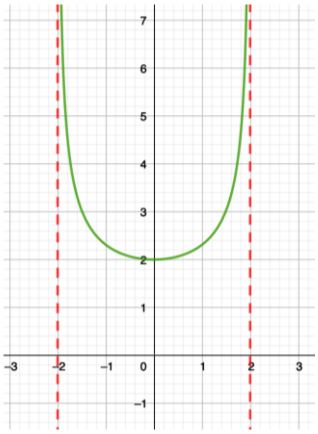
b) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$



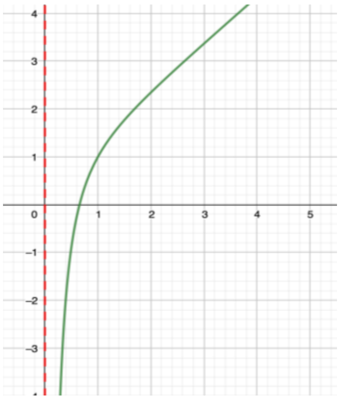
c) $y=\cos x-\cos^2 x$



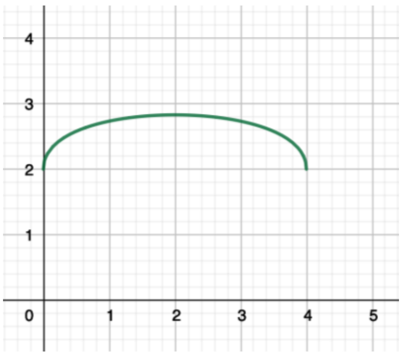
d) $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$



e) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$



f) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$



13 Problemas de optimización

45. Halla un número positivo que, sumado con su inverso, dé un resultado mínimo.

El número buscado es $x=1$.

46. Cálculo de dimensiones. Un jardinero quiere construir un parterre en forma de sector circular y de perímetro 100 m. ¿Cuál debe ser el radio del parterre para que la superficie sea máxima?

El radio debe ser de 25m y, por tanto, la superficie del parterre de 625m^2

47. Cálculo de dimensiones. Determina las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica de 1 l de aceite, para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

La lata tiene que tener de radio $r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\approx 0{,}54\,\text{dm}$ y de altura $h=\dfrac{1}{\pi\sqrt[3]{2\pi}}\approx 1{,}08\text{ dm}$, siendo la superficie mínima de aproximadamente $5{,}54\,\text{dm}^2$.

48. De todos los rectángulos de área dada, A, encuentra las dimensiones del que tenga perímetro mínimo.

Los rectángulos de perímetro mínimo son cuadrados que tengan de lado un valor igual a la raíz cuadrada del área A.

➢ ACTIVIDADES

❖ Recta tangente y técnicas de derivación

49. El espacio, en metros, recorrido por un objeto viene dado por $f(t)=\dfrac{t^2}{4}+2t+1$, donde t es el tiempo en segundos.

a) Calcula la velocidad media en los intervalos [1,3], [1,2], [1, 1,5] y [1, 1,1].

b) Halla la velocidad en el instante $t=1$.

a) [1,3], $v_m = 3\text{ m/s}$

[1,2] $v_m = 2{,}75\,\text{m/s}$

[1, 1,5], $v_m = 2{,}625\text{ m/s}$

[1, 1,1], $v_m = 2{,}525\text{ m/s}$

b) La velocidad en el instante $t=1$, es: $2{,}5\text{ m/s}$

50. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^2-3x+2$ b) $f(x)=x^3-7x^2-5x+2$ c) $f(x)=x^2-\dfrac{7}{x}$ d) $f(x)=x^2-2\sqrt{x}$

e) $f(x)=(2-5x)(2x^2+4x)$ f) $f(x)=\dfrac{2-5x}{x^2-2}$ g) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+2}$ h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+2}$

i) $f(x)=\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}+1$ j) $f(x)=\left(\dfrac{2}{x-2}\right)^4$ k) $f(x)=\sqrt[3]{5x-2x^2}$ l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

a) $f'(x)=2x-3$

b) $f'(x)=3x^2-14x-5$

c) $f'(x)=2x+\dfrac{7}{x^2}$

d) $f'(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x)=-30x^2-32x+8$

f) $f'(x)=\dfrac{5x^2-4x+10}{(x^2-2)^2}$

g) $f'(x)=\dfrac{2x^4+12x^2}{(x^2+2)^2}$

h) $f'(x)=\dfrac{-3x^2+2}{(x^2+2)^2}$

i) $f'(x)=\dfrac{-5}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$

j) $f'(x)=\dfrac{-64}{(x-2)^5}$

k) $f'(x)=\dfrac{5-4x}{3\sqrt[3]{(5x-2x^2)^2}}$

l) $f'(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$

51. Calcula la derivada de las siguientes funciones exponenciales o logarítmicas.

a) $f(x) = e^{-5x} + x$ b) $f(x) = 3^{2x}$ c) $f(x) = x^2 e^{2x}$ d) $f(x) = x^2 \ln x$ e) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

f) $f(x) = \log_3(2x+1)$ g) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$ h) $f(x) = (x^2+1)e^{-x}$

a) $f'(x) = -5e^{-5x} + 1$

b) $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$

c) $f'(x) = 2xe^{2x}(x+1)$

d) $f'(x) = x(2\ln x + 1)$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$

f) $f'(x) = \dfrac{2}{(2x+1)\cdot \ln 3}$

g) $f'(x) = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

h) $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x - 1)$

52. Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $f(x) = \cos(2x-1)$ b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ c) $f(x) = x\cos 2x$ d) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ e) $f(x) = e^x \cos 2x$

f) $f(x) = \ln\sqrt{\operatorname{sen} x}$ g) $f(x) = \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x}$ h) $f(x) = x^2 - \operatorname{arctg} x$ i) $f(x) = \cos x - 2x\operatorname{sen}^2 x$ j) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x}$

a) $f'(x) = -2\operatorname{sen}(2x-1)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$

c) $f'(x) = \cos 2x - 2x\operatorname{sen} 2x$

d) $f'(x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

e) $f'(x) = e^x(\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x)$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{cotg} x$

g) $f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

h) $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 2x - 1}{1+x^2}$

i) $f'(x) = -\operatorname{sen} x(1 + 2\operatorname{sen} x + 4x\cos x)$

j) $f'(x) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}{(\cos^2 x)(1+\operatorname{sen} x)^2}$

53. Determina si la función $y = e^{2x} - 3e^{-x}$ verifica la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$.

Sí verifica la ecuación.

54. Determina los puntos de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 4$ en los que la recta tangente pasa por el origen de coordenadas.

Los puntos de tangencia son: $P_1\left(-2\sqrt{2}, 8-8\sqrt{2}\right)$ y $P_2\left(2\sqrt{2}, 8+8\sqrt{2}\right)$.

55. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 + 2e^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

La ecuación de la recta tangente es: $2x - y + 2 = 0$

La ecuación de la recta normal es: $x + 2y - 4 = 0$

56. Determina los coeficientes de la curva $y = ax^2 + bx$ si la ecuación de la recta tangente en el punto (1,1) es: $3x - y - 2 = 0$.

Los coeficientes son: $a = 2$ y $b = -1$.

57. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{e^x}{x^2+1}$ en el punto de abscisa x=1.

Ecuación de la recta tangente: $y = \frac{e}{2}$

58. Halla todos los puntos de la gráfica de la siguiente función en los que la recta tangente es horizontal: $g(x) = \text{sen}2x - 2\text{sen}x$

Las rectas tangentes a la curva $g(x)$ en los puntos $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$ son horizontales.

59. Halla la pendiente de la curva $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ en el punto de abscisa x = -1.

La pendiente de la curva en el punto de abscisa $x = -1$ es: $m = \frac{9\sqrt{10}}{100}$

60. Considera la curva $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, donde a es un número real. Encuentra para qué valores de a la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ es paralela a la recta $3x + y - 3 = 0$

Los dos valores de a para los cuales la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ es paralela a la recta dada son $a = 2$ y $a = \frac{2}{3}$.

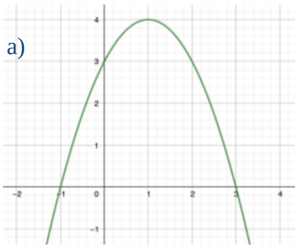
61. Halla la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por el punto (1,3) y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante.

La ecuación de la parábola buscada es: $y = 2x^2 + x$

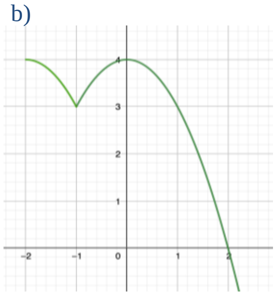
❖ Crecimiento, decrecimiento y extremos

62. Se muestran las gráficas de la función f' derivada de una función f. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento? ¿Hay algún extremo relativo? ¿Es máximo o mínimo?

a)



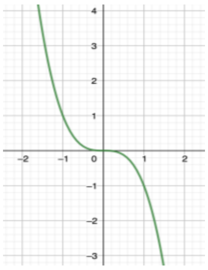
b)

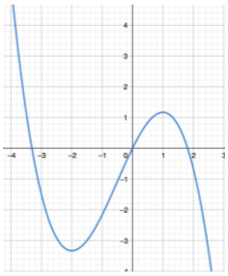


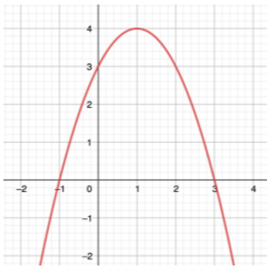
a) En $x=-1$ la curva f pasa de decrecer a crecer y, por tanto, hay un mínimo relativo. Mientras que en $x=3$ la curva f pasa de crecer a decrecer y, en consecuencia, hay un máximo relativo.

b) $f'<0$ En $x=2$ la curva f pasa de crecer a decrecer y, por tanto, hay un máximo relativo.

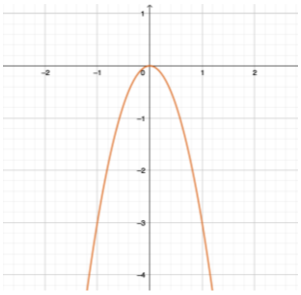
63. Dibuja de forma aproximada, a partir de la gráfica de cada función, la gráfica de su función derivada correspondiente.

a) 

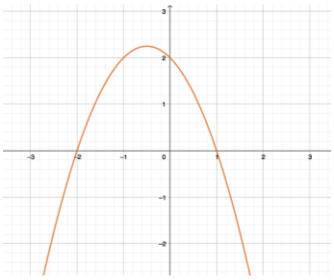
b) 

c) 

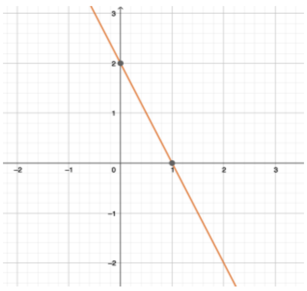
a)



b)



c)



64. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=x^3-3x^2+4$ b) $f(x)=x^4-x^2-3$ c) $f(x)=xe^{-x}$

d) $f(x)=x-2\text{sen}x,\ x\in(0,2\pi)$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ f) $f(x)=\ln(1-x^2)$

a) La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty,0)\cup(-1,+\infty)$ y dereciente en $(0,2)$. Además, hay un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$.

b) La función $f(x)$ es creciente en ,$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$y dereciente en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Además, hay un máximo relativo en $x=0$ y dos mínimos relativos en $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty,1)$ y dereciente en $(1,+\infty)$. Por otra parte, hay un máximo relativo en $x=1$.

d) La función $f(x)$ es creciente en $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$ y decreciente en $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi\right)$. Además, hay un mínimo relativo en $x=\dfrac{\pi}{3}$ y un máximo relativo en $x=\dfrac{5\pi}{3}$.

e) $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y$(-1,0)$ y decreciente en $(0,1)y(1,+\infty)$. Hay un máximo relativo en $x=0.$

f) La función $f(x)$ es creciente en $(-1,0)$, decreciente en $(0,1)$ y tiene un máximo relativo en $x=0.$

65. ¿Qué relación existe entre los máximos y mínimos relativos de las funciones cualesquiera $y_1=f(x)$ e $y_2=\left[f(x)\right]^2+k$, para $k\in\mathbb{R}$.

No se puede garantizar con certeza que exista relación entre los extremos relativos de $y_1=f(x)$ e $y_2=\left[f(x)\right]^2+k$, para $k\in\mathbb{R}$.

66. Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x^3-15x^2+36x-1$ b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ c) $f(x)=2x^3+3x^2-3$ d) $f(x)=x+2\text{sen}x$

a) máximo relativo en $x=2.$
mínimo relativo en $x=3$.

b) máximo relativo en $x=0.$
mínimo relativo en $x=2$

c) mínimo relativo en: $f''(-1) = -18 < 0$

máximo relativo en $x = -1$.

d) máximo relativo en $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

mínimo relativo en $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

67. Sea la función $f(x) = x - \frac{a}{x}$, $x \neq 0$; $x = 0$. Determina el valor de a para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = 2$.

Para $a = -4$, hay un máximo relativo en $x = 2$.

68. Encuentra el valor de los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por el punto $P(-2, 5)$ y tiene un mínimo relativo en $M(5, 8)$

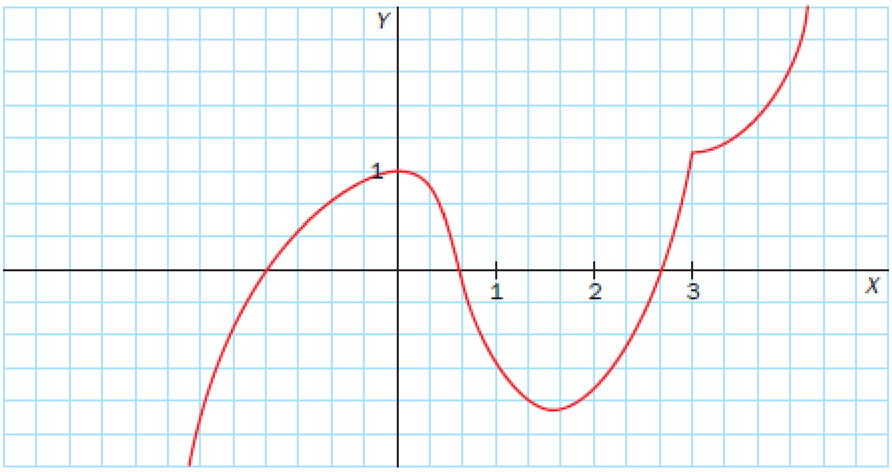
$y = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $y' = 2ax + b$

Coeficientes: $a = -\frac{13}{49}$, $b = \frac{130}{49}$, $c = \frac{67}{49}$

69. Esboza la gráfica de una función que cumpla las condiciones

$$f'(x) < 0 \text{ en } (0,1)$$
$$f'(x) > 0 \text{en } (-\infty,0) \cup (1,3) \cup (3,+\infty)$$
$$f'(0) = f'(1) = f'(3) = 0$$

Una gráfica que cumpla estos requisitos puede ser:

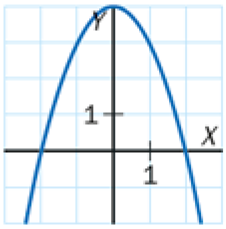


70. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x) = axe^{bx^2}$ tiene un máximo relativo en el punto $(2, 1)$?

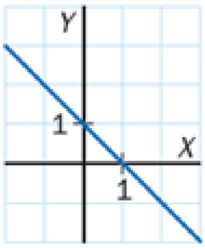
$a = \frac{\sqrt{e}}{2}$ y $b = -\frac{1}{8}$.

71. Analiza la gráfica de la derivada de las siguientes funciones para determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.

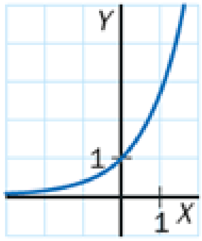
a) $f'(x)$



b) $g'(x)$



c) $h'(x)$



a) Como en $x = -2$ la curva $f(x)$ pasa de decrecer a crecer, entonces tiene un mínimo relativo. Sin embargo, en $x = 2$ la curva $f(x)$ pasa de crecer a decrecer y entonces tiene un máximo relativo en dicho punto.

b) En $x = 1$ la curva $g(x)$ pasa de crecer a decrecer y entonces tiene un máximo relativo en dicho punto.

c) Es creciente en todo $\mathbb{R}$.

72. Calcula en función de k los máximos y los mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, $k \neq 0$

La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(0, -\frac{1}{k}\right)$, $k > 0$.

La función $f(x)$ también tiene un máximo relativo en el punto $\left(0, -\frac{1}{k}\right)$, $k < 0$.

73. Calcula los valores de *a, b* y *c* en la función $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$ sabiendo que esta tiene un extremo relativo en $x=1$ y que la recta tangente a su gráfica en $x=0$ es $y = x+3$.

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$

74. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = (x+1)e^{-x}$ b) $f(x) = (x+3)^2 e^{-x}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(-1, +\infty)$ y creciente en $(-3, -11)$. Hay un mínimo relativo en $x = -3$ y un máximo relativo en $x = -1$.

75. Se lanza un cohete, y este, al cabo de t segundos, alcanza una altura, en metros, que viene dada por $f(t)=500t-5t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Al cabo de cuántos segundos lo logra?

Al cabo de 50 segundo el cohete alcanza la altura máxima de 12 500 m

76. Determina el valor de b para que la función $f(x)=x^3-bx^2$ tenga un extremo relativo en $x=-3$. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

b = — 9/2

❖ Concavidad y puntos de inflexión

77. Halla los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de las siguientes curvas:

a) $f(x)=x^4-2x^3$ b) $g(x)=x^3-3x^2-9x$ c) $h(x)=2x^3-9x^2+12x-4$

a) La función es cóncava en $(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$ y convexa en $(0,1)$. Además, tanto en $x=0$ como en $x=1$c ambia de curvatura y, en consecuencia, son puntos de inflexión.

b) La función es cóncava en $(1,+\infty)$ y convexa en $(-\infty,1)$. Así mismo, en *x* = 1 cambia de curvatura y, en consecuencia, hay punto de inflexión.

c) La función es cóncava en $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ y convexa en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. Así mismo, en $x=\frac{3}{2}$ Cambia de curvatura y, en consecuencia, hay punto de inflexión.

78. Dada la función $f(x)=x^3-12x^2+36x$, prueba que el punto de inflexión es el punto medio de los dos extremos relativos.

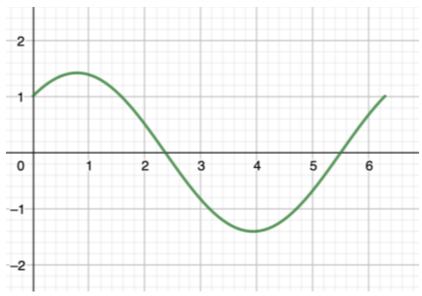
El punto de inflexión es el punto medio de los extremos relativos porque:

$$(4,16)=\left(\frac{2+6}{2},\frac{32+0}{2}\right)$$

79. Halla los máximos y los mínimos relativos, así como los puntos de inflexión, de la función $f(x)=\text{sen }x+\cos x$ en el intervalo $[0,2\pi]$. Posteriormente, dibuja la curva en ese intervalo.

Tiene un mínimo relativo en $x=\frac{5\pi}{4}$, mientras que en $x=\frac{\pi}{4}$ hay un máximo relativo.

La función es convexa en $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$ y cóncava en $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$. Como en $x=\frac{3\pi}{4}$ y $x=\frac{7\pi}{4}$ cambia de curvatura la función, entonces ambos son puntos de inflexión.
Su gráfica es:

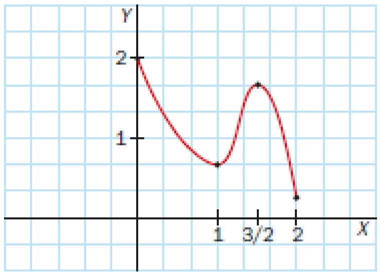


80. Prueba que la función $f(x)=(x-2)^4$ tiene extremo relativo en x=2, si bien $f''(2)=0$. ¿Tiene $f(x)$ puntos de inflexión?

La función siempre es cóncava y no tiene puntos de inflexión. (Observa su gráfica)

81. Dibuja la gráfica de una función que sea continua en el intervalo [0,2] y tenga un máximo absoluto en $x=0$, un mínimo absoluto en $x=2$, un mínimo relativo $x=1$ y un máximo relativo en $x=\frac{3}{2}$.

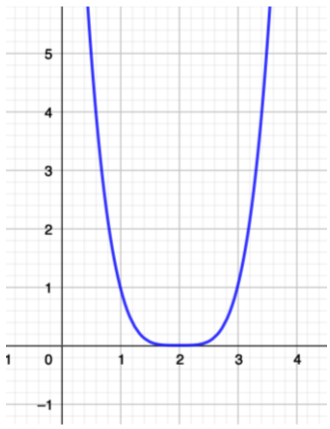
Una función que cumple las condiciones del enunciado es la siguiente:



82. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a}$, donde $a\in \mathbb{R}$.

a) Halla el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=\sqrt{3}$.

a) Para $a=3$ la función $f(x)$ tiene extremo relativo en $x=\sqrt{3}$.



83. Para $a=4$, halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la curva de la actividad anterior.

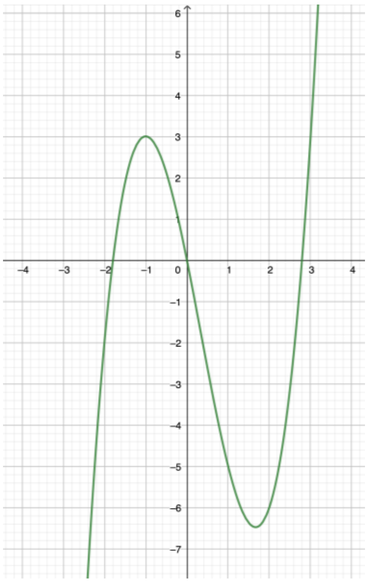
Mínimo relativo en $x=-2$. Máximo relativo en $x=2$.

La función tiene puntos de inflexión en $x=0, x=-3\sqrt{2}$ y $x=3\sqrt{2}$.

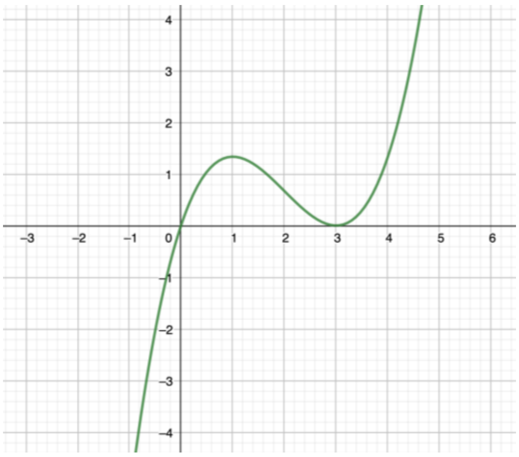
❖ Dibujo de curvas

84. Representa gráficamente las siguientes funciones: a) $y=x^3-x^2-5x$ b) $y=\frac{1}{3}x(x-3)^2$

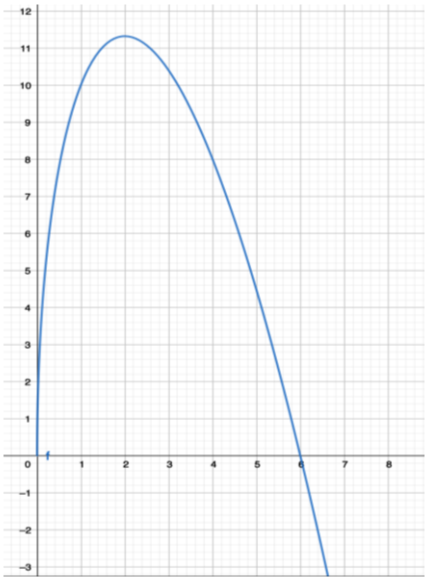
a) $y = x^3 - x^2 - 5x$



b) $y = \frac{1}{3}x(x-3)^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$



85. Dibuja la curva $f(x)=2\sqrt{x}(6-x)$.



86. Dibuja las siguientes curvas:

a) $f(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$

b) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$

e) $f(x)=x\cdot\ln x$

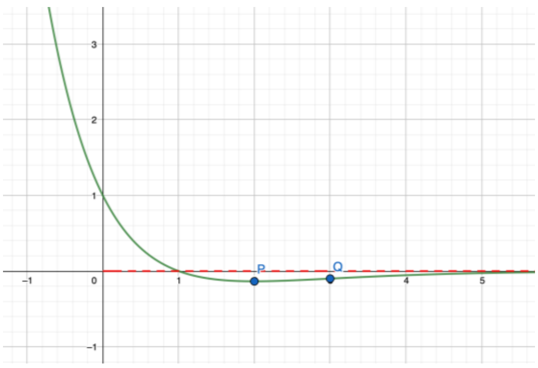
f) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

g) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

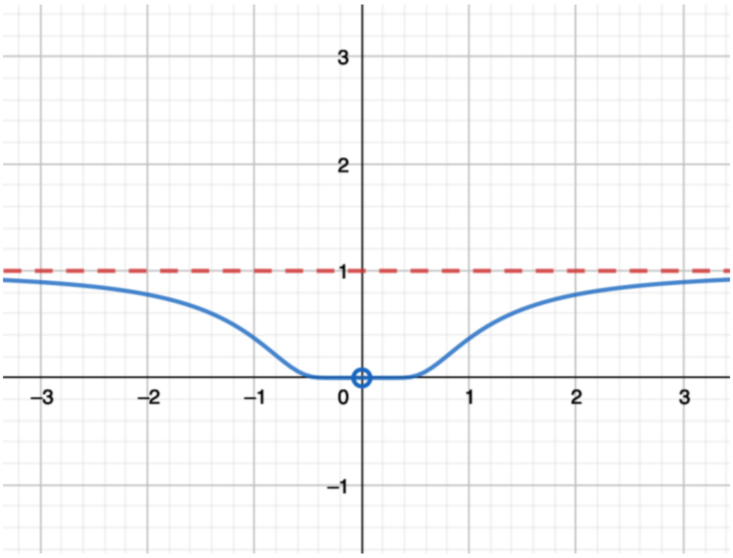
h) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+1}}$

i) $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$

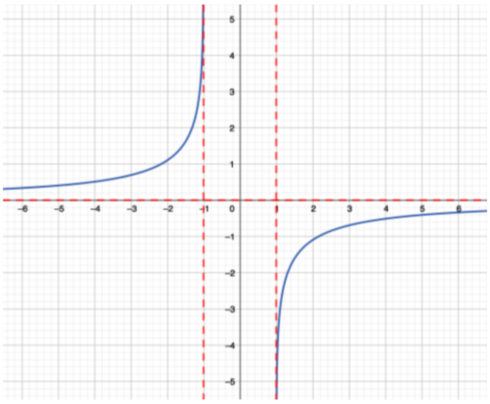
a) $f(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$



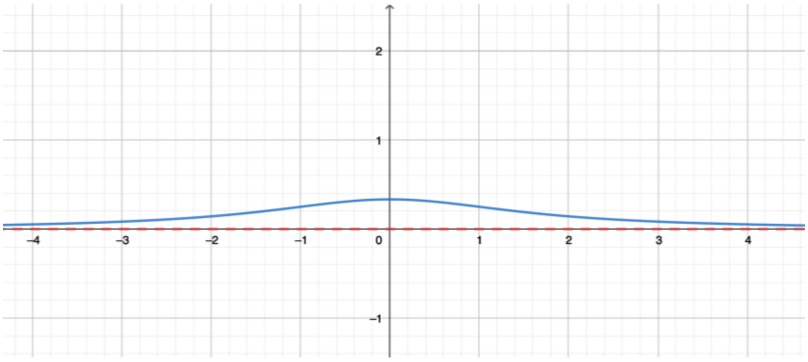
b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$



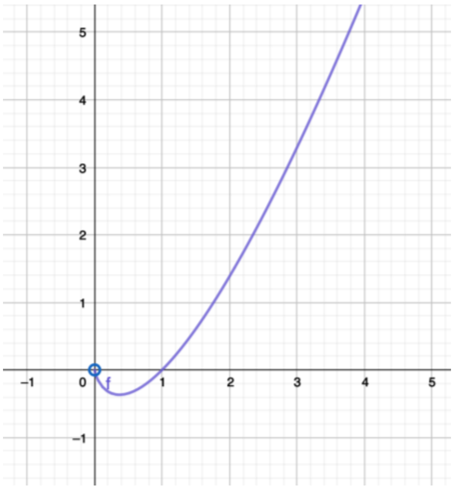
c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$



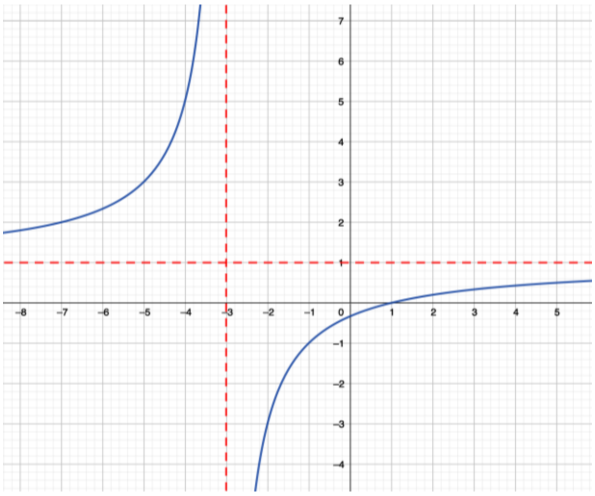
d) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+3}$



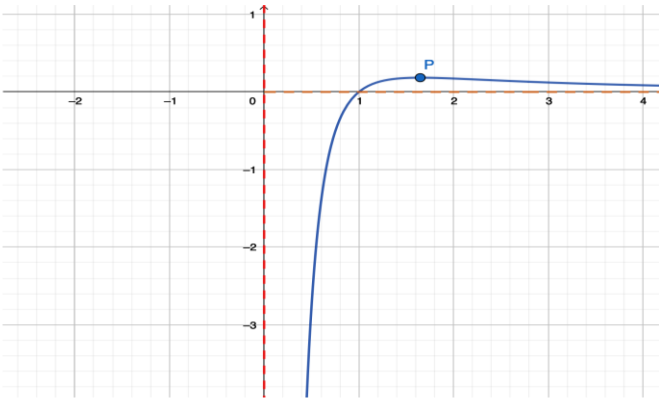
e) $f\left(x\right)=x\cdot \ln x$



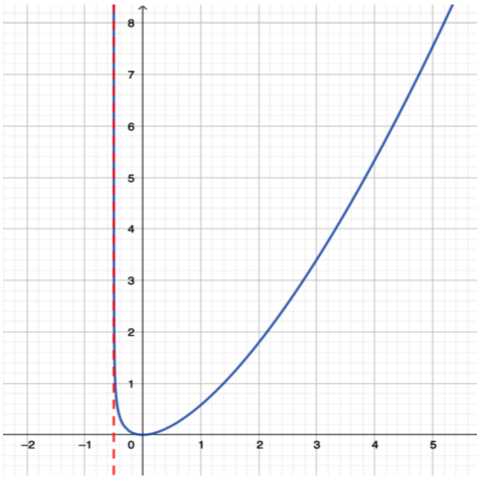
f) $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+3}$



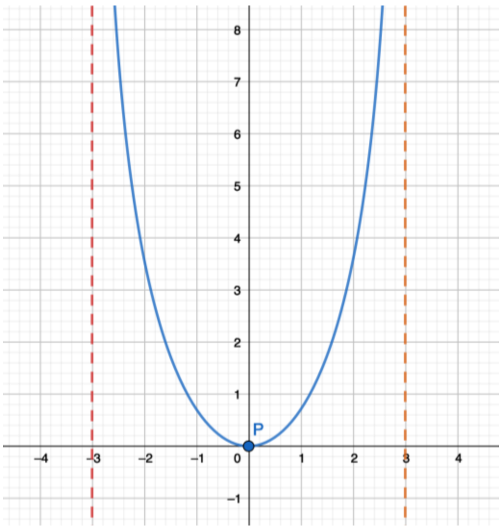
g) $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$



h) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}$



i) $f(x)=\frac{2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$

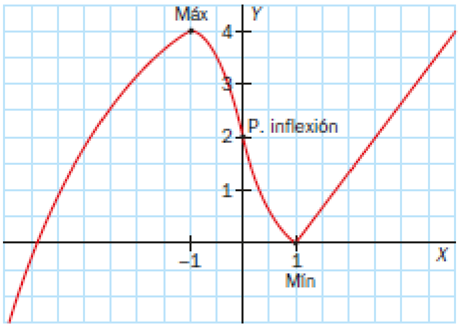


87. Dibuja la gráfica de una función que verifique:

$f(-1)=4 \qquad f(1)=0 \qquad f'(x)<0, \text{si } -1<x<1$

$f'(-1)=0 \quad \text{ó} f'(1) \qquad f'(x)>0, \text{si } x<-1 \text{o } x>1$

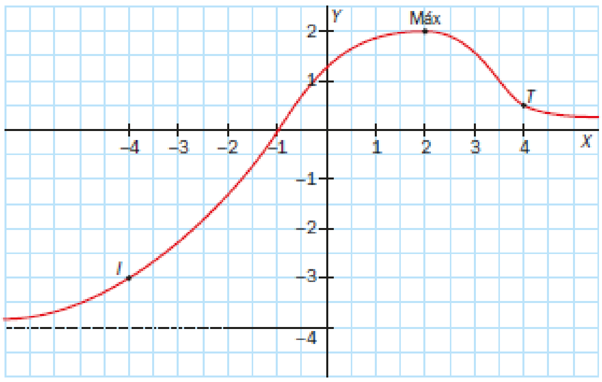
$f''(x)>0, \text{si } \; x>0 \qquad f''(x)<0, \; \text{si } x<0$



88. Dibuja la gráfica de una función que verifique:

$f'(x)<0 \;\; \text{en}(2,+\infty) \qquad f'(x)>0\,\text{en}(-\infty,2) \qquad f''(x)<0\,\text{en}(-4,4)$

$f''(x)>0 \;\text{en}(-\infty,-4)\cup(4,+\infty) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-4 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$



❖ Optimización

89. Halla los extremos absolutos de:

a) $f(x)=2x^2-5x+2$ en [0,4] b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en [0,2].

a) El valor mínimo es $f\left(\dfrac{4}{5}\right)=-1{,}125$ y el máximo $f(1)=14$.

b) El valor mínimo es $f(0)=0$ y el máximo $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

90. Determina el punto de la curva $y = \sqrt{2x}$ más próximo al punto (1,4).

El punto $P(2,2)$ de la curva $y = \sqrt{2x}$ es el que está situado a menos distancia del punto $M(1,4)$.

91. De todos los rectángulos de 20 cm de perímetro, determina el que tenga diagonal mínima.

El rectángulo de perímetro 20 cm y diagonal mínima $d = 5\sqrt{2}$ es el cuadrado de lado 5 cm.

92. Halla el punto de la curva $y = 4 - x^2$, en el que su tangente determina, en el primer cuadrante, un triángulo de área máxima con los ejes de coordenadas.

El punto de tangencia que cumple las condiciones es $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

❖ Aplicaciones

93. **Propagación de un rumor.** La propagación de un rumor entre los compañeros de un curso de bachillerato sigue la función $f(t) = e^{0,462t}$, donde t viene dado en días. ¿Cuál es la rapidez a la que se propaga el rumor al tercer día? ¿Y al décimo?

La rapidez a la que se habrá propagado el tercer día es de aproximadamente 2 compañeros.

La rapidez a la que se habrá propagado el décimo día es de aproximadamente 47 compañeros.

94. **Diseño de valla publicitaria.** Unas expertas en publicidad y aficionadas a las matemáticas van a diseñar una valla publicitaria de longitud 2π metros y altura definida por la curva $y = x + \cos x$, limitada por dos franjas verticales en $x = 0$ y $x = 2\pi$. Calcula la altura máxima de la valla.

La altura máxima de la valla se produce en el extremo derecho y es de aproximadamente 7,28 metros.

95. **Depreciación.** El precio, en euros, de una moto en función de su antigüedad en años, t, viene dado por: $p(t) = 110(t-10)^2 + 4000$, donde $0 \le t \le 10$.

a) ¿A qué precio se compró? ¿Cuál es su valor al cabo de 8 años?
b) ¿A qué ritmo decrece su valor a los 3 años? ¿Y a los 5 años? ¿Y a los 7 años?

a) Se compró a un precio: $p(0) = 15000$ €

A los 8 años su valor es: $p(10) = 4440$€

b) $p'(3) = -1540$ € disminuye su precio el tercer año.

$p'(5) = -1100$ € disminuye su precio el quinto año.

$p'(7) = -660$ € disminuye su precio el séptimo año.

96. Evolución del peso. El peso en kilogramos de un toro se puede modelar por la función $f(t) = 1200 - 1140e^{-0,4t}$, siendo t el tiempo en años.

a) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el toro pese 800 kg?
b) ¿Es cierto que el peso del toro aumenta muy rápido al comienzo de su vida, para luego crecer más lentamente? Compruébalo calculando el ritmo de crecimiento al cabo de uno, dos y tres años.

a) Debe transcurrir aproximadamente dos años y siete meses para que el toro pese 800 kg.

b) Aumenta su peso muy rápido al principio, pero decrece más lentamente al cabo de los años.

97. Receta de cocina. Xinjie y Noelia son dos compañeros universitarios aficionados a la cocina y van a preparar su plato favorito "pavo al horno con sala bárbara y hojas de ciprés". La temperatura, en grados centígrados, que mantiene el pavo t minutos después de sacarlo del horno se puede modelar mediante la función: $T(t) = 62e^{-0,13t} + 23$.

a) ¿A qué temperatura salió el pavo del horno?
b) ¿A qué ritmo disminuye la temperatura del pavo después de un minuto de estar en la mesa? ¿Y tras tres minutos?

a) Al sacar el pavo del horno, la temperatura que tiene es de $85\,^{\circ}\mathrm{C}$.

b) Después de un minuto disminuye a un ritmo de $7\,^{\circ}\mathrm{C}$.
Después de tres minutos disminuye a un ritmo de $5\,^{\circ}\mathrm{C}$

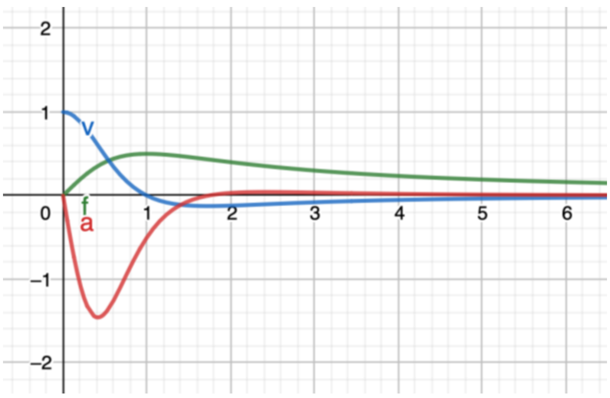
98. Movimiento de una partícula. Una partícula se mueve a lo largo del eje x, su posición en función del tiempo viene dada por $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$, para $t \geq 0$, donde $f(t)$ viene dado en metros, y t, en segundos.

a) Calcula la velocidad en el instante t. ¿Cuándo aumenta? ¿Cuándo disminuye? ¿En qué instante la velocidad es máxima o mínima?
b) Halla la aceleración en el instante t. ¿Cuándo es 0?
c) Dibuja las funciones de posición, velocidad y aceleración en el intervalo [0,4].

a) La velocidad aumenta cuando el tiempo es inferior a un segundo y disminuye a partir de un segundo. Siendo máxima la velocidad al cabo de un segundo.

b) La aceleración es nula en los instantes $t = 0$ y $t = \sqrt{3}$.

c) Las gráficas de las funciones de posición, velocidad y aceleración en el intervalo [0,4] son las siguientes:



99. Costes y beneficios. Determina el número de unidades x que se deben fabricar para maximizar el beneficio obtenido por la venta de un producto, sabiendo que los costes vienen dados por $C(x)=0,0004x^3-0,02x^2+2x-65$, y los ingresos por $I(x)=-0,02x^2+2,3x$, medidos en miles de euros en ambos casos.

Se deberán fabricar 16 unidades con el fin de obtener un beneficio máximo de aproximadamente 68162 euros.

100. Asesoría de venta de automóviles. Una asesora de ventas de un concesionario de automóviles vende 50 coches al mes a un precio de 20 000 euros cada uno. Por cada coche que venda de más, puede bajar el precio en 300 euros. ¿Cuánto coches debe vender al mes para obtener el máximo ingreso por ventas?

La asesora de ventas del concesionario deberá vender 58 coches al mes con el fin de lograr unos ingresos máximos por venta 1020800 euros.

102. Venta *on-line*. Un fabricante vende *on-line* 1000 ordenadores portátiles por semana, a razón de 450 euros cada uno. Por cada 10 euros de descuento que ofrece, el número de portátiles vendidos se incrementa en 100 por semana.

a) Calcula la función de la demanda.

b) ¿Cuántos portátiles y a qué precio debe vender para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

a) $p(x)=450-\dfrac{10}{100}(x-1000)=550-0,1x \quad , \quad x\geq 0$

b) Debería vender 2750 ordenadores a la semana con el fin de obtener unos ingresos máximos de 756250 €. Por otra parte, el precio de cada ordenador debería ser de 275 €, es decir, con un descuento de 175 € sobre el precio inicial de 450 €.

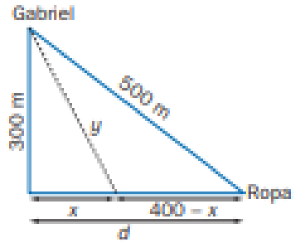
103. Cálculo de dimensiones. Un alambre enrollado de 100 m de longitud se divide en dos partes. Con una de ellas se construye una circunferencia y, con la otra, un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?

Una de aproximadamente 44 metros y, otra, de 56 metros para la construcción del cuadrado.

104. Efectividad de la publicidad en Internet. La efectividad de un anuncio publicitario en internet depende del número de veces que una persona lo vea. Una empresa publicitaria ha encontrado un modelo que le permite analizar la efectividad y viene dado por $E(x)=0,9x-0,15x^2$, donde x es el número de veces que se ve el anuncio. ¿Cuántas veces debe ver el anuncio una persona para que tenga máxima efectividad?

Una persona deberá ver el anuncio tres veces para lograr la máxima efectividad.

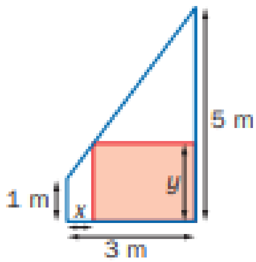
105. Selección de rutas. Gabriel está bañándose en el mar y, de repente, empieza una tormenta. Para recoger su ropa, que está en la orilla de la playa, duda entre ir nadando directamente hacia ella o salir del agua en otro punto y llegar corriendo allí por la orilla. Su velocidad por tierra es de 6 m/s, y nadando, de 2 m/s. Si se encuentra situado, en línea recta, a 500 m de la ropa y a 300 m de la orilla, ¿cuál es el mejor camino que puede seguir?



Gabriel deberá ir nadando 318 m y por tierra 294 m, logrando un tiempo mínimo de 208 segundos, o sea, aproximadamente tres minutos y medio.

106. Estudio de arquitectura. Se desea construir un armario rectangular en el hueco de una escalera de un chalet.

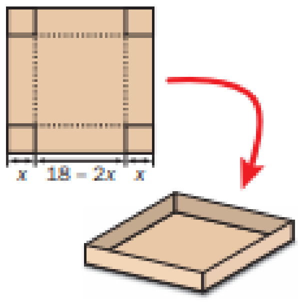
a) Expresa el área del rectángulo en función de la longitud *x*.
b) Halla las dimensiones del rectángulo que tenga una superficie máxima.



a) El área en función de la longitud *x* es: $A(x)=(3-x)\cdot y=(3-x)\cdot\frac{5}{3}x=5x-\frac{5}{3}x^2$

b) El armario tendrá $1{,}5\,\mathrm{m}$ de longitud y $2{,}5\ \mathrm{m}$ de altura, siendo su superficie máxima de $3{,}75\ \mathrm{m}^2$.

107. Cálculo de dimensiones. Para fabricar un vaciabolsillos con una pieza cuadrada de polipiel de 18 cm de lado, cortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y luego doblándolos. Calcula el lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen del vaciabolsillos sea el máximo posible.



Habrá que cortar un cuadrado de 3 cm de lado y así conseguir un vaciabolsillos de volumen máximo igual a $432\,\mathrm{cm}^3$

Un mundo matemático

1. Halla la tasa de variación media entre los ejercicios 2013 y 2015, y entre 2017 y 2020.

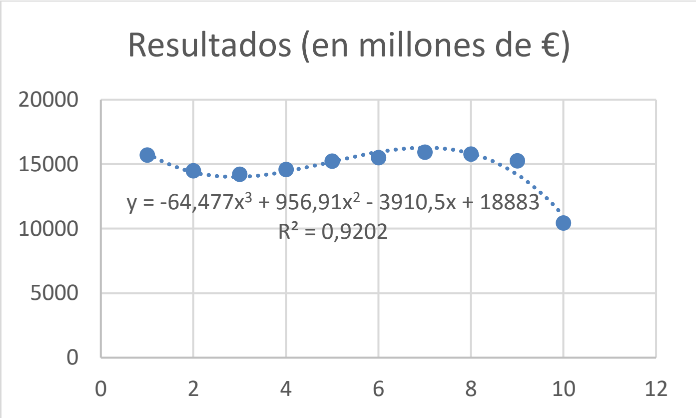
La tasa de variación media entre los años 2013 y 2015 fue $499{,}5$ millones de euros

Y entre los años 2017 y 2020 fue: $-1834{,}3$ millones de euros

2. Considera el año 2011 como *x* = 1, el año 2012 como *x* = 2, y así sucesivamente, y utiliza Excel, GeoGebra o cualquier otro software o calculadora gráfica para ajustar una función *f*(*x*) polinómica de grado tres que proporcione la cifra de negocio en función de *x*.

Mediante Excel el polinomio de grado tres que mejor se ajusta a estos datos es el siguiente:

$$f(x) = -64{,}477x^3 + 956{,}91x^2 - 3910{,}5x + 18883$$



3. Calcula las derivadas primera y segunda de *f*(*x*).

La derivada primera es:

$$f'(x) = -193{,}431x^2 + 1913{,}82x - 3910{,}5$$

Y la derivada segunda es:

$$f''(x) = -386{,}862x + 1913{,}82$$

4. Determina con el modelo ajustado y *f'*(*x*) en qué intervalos aumentaron los resultados y en cuáles disminuyeron. ¿Coinciden con los datos del diagrama de barras?

Disminuyen las cifras de negocio de 2011 a 2013, alcanzado el mínimo en el año 2013. A su vez, aumentan desde 2013 hasta 2017, logrando el máximo en el año 2017. A partir del año 2017 descienden hasta finalizar el período estudiado en 2020.

Por otra parte, podemos observar que coincide con los datos facilitados en el diagrama de barras.

5. Encuentra el ejercicio en el que los resultados tuvieron una mayor tasa de crecimiento mediante $f''(x)$.

Se puede decir que en el año 2015 (x=5) hay un punto de inflexión y, por tanto, se produjo una mayor tasa de crecimiento.

6. Investiga la situación económica en nuestro país desde el 2015 al 2020. ¿Existe alguna relación con los datos de El Corte inglés?

En El Corte Inglés hubo un crecimiento entre 2015 y 2017, pero en los años siguientes descendieron las cifras de negocio y no coinciden con el PIB. Obviamente el año 2020 fue malo para todos.

7. Los datos de los últimos años, ¿han provocado cambios en los puestos directivos de El Corte Inglés? ¿Su plan estratégico se ha visto afectado?

Respuesta abierta.

8. Investiga en la web de El Corte Inglés la responsabilidad social corporativa en aspectos como la producción y consumo responsables, la digitalización verde, acciones por el clima, la igualdad, la diversidad y el compromiso social.

Respuesta abierta.

9. ¿Cómo realiza El Corte Inglés el reciclaje de residuos electrónicos?

Respuesta abierta.