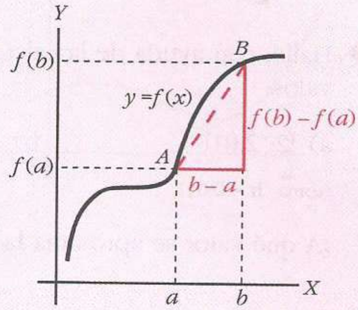
1 CONCEPTO DE DERIVADA

1.1 TASA DE VARIACIÓN MEDIA

- La **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, $y = f(x)$, en un intervalo $[a, b]$ se define de la siguiente manera:

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



- La T.V.M. $[a, b]$ es la pendiente del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.
- La T.V.M. $[a, b]$ representa el crecimiento medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.
- Si designamos el intervalo como $[a, a + \text{h}]$ (h es la longitud del intervalo), entonces queda:

$$\text{T.V.M. } [a, a + \text{h}] = \frac{f(a + \text{h}) - f(a)}{\text{h}}$$

1 Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en cada uno de los siguientes intervalos:

a) $[-1, 1]$ b) $[-1, 2]$ c) $[0, 2]$ d) $[1, 3]$

2 Halla la T.V.M. de la función $f(x) = 3x - 2$ en los intervalos:

a) $[0, 3]$ b) $[-1, 2]$ c) $[1; 1,5]$ d) $[a, b]$

Interpreta los resultados obtenidos.

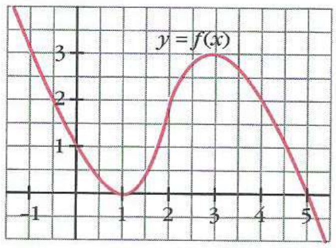
3 Halla la T.V.M. de esta función en los intervalos que se indican:

a) $[-1, 0]$

b) $[1, 3]$

c) $[0, 2]$

d) $[3, 5]$



4 Halla la T.V.M. de la función $f(x) = 2^x$ en el intervalo $[0, 3]$. ¿Cómo es la función en ese intervalo, creciente o decreciente?

5 Calcula la T.V.M. de cada una de las siguientes funciones en el intervalo [0, 2] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = 1 - x^2$ c) $h(x) = 3^x$ d) $i(x) = \dfrac{1}{x+1}$

6 Halla, con ayuda de la calculadora, la T.V.M. de la función $f(x) = x^2$ en cada uno de estos intervalos:

a) [2; 2,01]   b) [2; 2,001]   c) [2; 2,0001]

(toma h = 0,01)

¿A qué valor se aproxima la T.V.M. [2, 2 + h] cuando h es "muy pequeño"?

7 a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{4}$ en el intervalo [2, 2 + h].

b) ¿Qué significado tiene h en ese intervalo?

c) ¿A qué valor se aproxima la T.V.M. [2, 2 + h] cuando la longitud del intervalo se hace "muy pequeña"?

8 a) Halla la T.V.M. de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo [1, 1 + h].

b) ¿A qué valor se aproxima la T.V.M. [1, 1 + h] cuando h se acerca a cero?

9 a) Halla la T.V.M. de la función $f(x) = \dfrac{3}{x}$ en el intervalo [1, 1 + h].

b) ¿A qué valor se aproxima la T.V.M. [1, 1 + h] cuando la longitud del intervalo se hace "muy pequeña"?

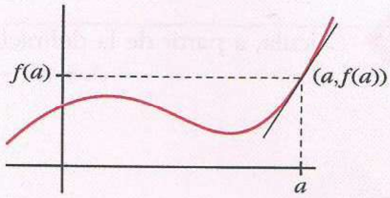
1.2 DERIVADA EN UN PUNTO POR PASO AL LÍMITE. FUNCIÓN DERIVADA

- Dada una función, $y = f(x)$, y un punto, $(a, f(a))$, se define la **derivada de $f(x)$ en $x = a$** como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Si llamamos $x - a = h$, entonces la definición queda así:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



- $f'(a)$ es la **pendiente de la recta tangente** a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ y mide el **crecimiento de la función en ese punto.**

EJERCICIO RESUELTO

Halla, a partir de la definición, la derivada de cada una de estas funciones en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

Resolución

a) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(1 + h)^2 - 1) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + h^2 + 2h) - 1 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + 2h^2 + 4h - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2h + 4)}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 4) = 4$$

Por tanto: $f'(1) = 4$

b) $$g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{(1 + h) + 1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{h + 2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2 - h - 2}{h + 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{h + 2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(h + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h + 2} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto: $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$

1. Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2 + 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2. Halla, utilizando la definición, la derivada de $f(x) = 2x - x^2$ en los puntos de abscisas 0 y –1.

3. Calcula, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = \dfrac{2}{x}$ en los puntos de abscisa 1 y 2.

4. Obtén, a partir de la definición, la derivada de la función $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ en el punto (–1, 1).

5. Calcula, utilizando la definición de derivada, el valor de $f'(1)$, siendo $f(x) = \dfrac{4x+1}{3}$.

6. Halla la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = 3 - x^2$ en el punto (1, 2).

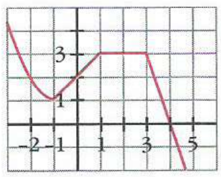
7. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$:

a) Calcula T.V.M. [2, 2 + h].

b) Halla $\lim\limits_{h \to 0}$ (T.V.M. [2, 2 + h]).

c) ¿Qué relación hay entre este limite y $f'(2)$?

8. La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. A partir de ella, calcula las derivadas que se indican:



a) $f'(-1)$

b) $f'(2)$

c) $f'(4)$

9. Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = a$.

Función derivada:

Llamamos **función derivada de f** (o simplemente **derivada de f**) a la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

EJERCICIO RESUELTO

a) Halla, a partir de la definición, la derivada de $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

b) Calcula $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ y $f'(1,5)$.

RESOLUCIÓN

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 3x - 3h + 1 - x^2 + 3x - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x - 3)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x - 3) = 2x - 3$$

b) Como ya tenemos $f'(x)$, los resultados son inmediatos:

$f'(0) = -3$; $f'(-1) = -5$; $f'(2) = 1$; $f'(1,5) = 0$

10 Halla, a partir de la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x + 1 \quad \to \quad f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{5} \quad \to \quad f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{2} \quad \to \quad f'(x) =$

d) $f(x) = x \quad \to \quad f'(x) =$

e) $f(x) = x^2 \quad \to \quad f'(x) =$

f) $f(x) = 4 \quad \to \quad f'(x) =$

g) $f(x) = \dfrac{3}{2} \quad \to \quad f'(x) =$

h) $f(x) = 2x^2 - x \quad \to \quad f'(x) =$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \to \quad f'(x) =$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad \to \quad f'(x) =$

k) $f(x) = \dfrac{2}{3x-1} \quad \to \quad f'(x) =$

2 REGLAS DE DERIVACIÓN

2.1 DERIVADA DE UNA POTENCIA, DE UNA SUMA Y DEL PRODUCTO POR UN NÚMERO

- $f(x) = k$ (constante) $\rightarrow$ $f'(x) = 0$
- $f(x) = x$ $\rightarrow$ $f'(x) = 1$
- $f(x) = x^n$ $\rightarrow$ $f'(x) = nx^{n-1}$
- $F(x) = f(x) \pm g(x)$ $\rightarrow$ $F'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $F(x) = k \cdot f(x)$ $\rightarrow$ $F'(x) = k \cdot f'(x)$

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 2x - 1$ ***b)*** $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{3}{5x^4}$ ***d)*** $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

RESOLUCIÓN

a) $f'(x) = 4x^3 - \frac{3}{4} \cdot 3x^2 + 2 = 4x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 2$

b) $f(x) = x^{1/2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{3}{5}x^{-4} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{5} \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = \frac{-12}{5}x^{-5} = \frac{-12}{5x^5}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^{1/3}} = x^{2-1/3} = x^{5/3} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$

Halla la derivada de cada una de estas funciones:

1. $f(x) = 2x + 1$ $\rightarrow$ $f'(x) =$
2. $f(x) = \frac{3x-2}{4}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$
3. $f(x) = \frac{3}{4}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$
4. $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ $\rightarrow$ $f'(x) =$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ $\rightarrow$ $f'(x) =$
6. $f(x) = \frac{3x^5}{5} - \frac{4x}{3} + 5$ $\rightarrow$ $f'(x) =$
7. $f(x) = \frac{4\pi - 2}{3}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

8. $f(x) = \frac{4}{3}(x^2 - \frac{3}{4}x + 2)$ → $f'(x) =$

9. $f(x) = \frac{x^2}{5} - \frac{x}{4} + \sqrt{5}$ → $f'(x) =$

10. $f(x) = \frac{x}{7} - \sqrt{7x} = \frac{x}{7} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{x}$ → $f'(x) =$

11. $f(x) = \frac{1}{x}$ → $f'(x) =$

12. $f(x) = \frac{3}{x^2}$ → $f'(x) =$

13. $f(x) = \frac{5}{3x^3}$ → $f'(x) =$

14. $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ → $f'(x) =$

15. $f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{x^2}$ → $f'(x) =$

16. $f(x) = \frac{3\sqrt{x^3}}{2x^4}$ → $f'(x) =$

17. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ → $f'(x) =$

18. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3} - \frac{x}{3} + \sqrt{5}$ → $f'(x) =$

19. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$ → $f'(x) =$

20. $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^5}}$ → $f'(x) =$

21. $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$ → $f'(x) =$

22. $f(x) = x - \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{x^2}$ → $f'(x) =$

23. $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{x^2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$ → $f'(x) =$

24. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^3} - x^2\sqrt{x}$ → $f'(x) =$

25. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x}$ → $f'(x) =$

2.2 OTRAS REGLAS DE DERIVACIÓN

- $F(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow F'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = cos\ x$
- $f(x) = cos\ x \rightarrow f'(x) = -sen\ x$
- $f(x) = tg\ x \rightarrow f'(x) = 1 + tg^2\ x = \dfrac{1}{cos^2 x}$
- $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \cdot ln\ a$
- $f(x) = ln\ x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = log_a x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln\ a}$

Halla la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3\ sen\ x - 2\ cos\ x \rightarrow f'(x) =$

2. $f(x) = 4\ tg\ x + e^x \rightarrow f'(x) =$

3. $f(x) = \underbrace{x}_{F(x)} \cdot \underbrace{ln\ x}_{G(x)} \rightarrow f'(x) = \underbrace{1}_{F'(x)} \cdot \underbrace{ln\ x}_{G(x)} + \underbrace{x}_{F(x)} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{G'(x)} = ln\ x + 1$

4. $f(x) = x\ e^x \rightarrow f'(x) =$

5. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot sen\ x \rightarrow f'(x) =$

6. $f(x) = 2^x \cdot tg\ x \rightarrow f'(x) =$

7. $f(x) = (x^2 - \dfrac{x}{3} e^x) \rightarrow f'(x) =$

8. $f(x) = (x^3 - 2x + 1) \cdot cos\ x \rightarrow f'(x) =$

9. $f(x) = 3^x + ln\ x - \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(x) =$

10. $f(x) = 2^x + log_2 x \rightarrow f'(x) =$

11. $f(x) = x^2 e^x + 2x\ ln\ x \rightarrow f'(x) =$

12 $f(x) = \sqrt{x}\, sen\, x - log_3 5 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

13 $f(x) = \dfrac{4x}{x+1} = \dfrac{F(x)}{G(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{\overbrace{4}^{F'(x)} \cdot \overbrace{(x+1)}^{G(x)} - \overbrace{4x}^{F(x)} \cdot \overbrace{1}^{G'(x)}}{\underbrace{(x+1)^2}_{(G(x))^2}} = \dfrac{4x+4-4x}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$

14 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

15 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

16 $f(x) = \dfrac{ln\, x}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

17 $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

18 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

19 $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

20 $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

21 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

22 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

23 $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

24 $f(x) = \dfrac{4x}{1-x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

25 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

26 $f(x) = x^2\, ln\, x \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

27 $f(x) = \dfrac{x\, e^x - ln\, x}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

28 $f(x) = 3^x\, sen\, x - log_2 x \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

29 $f(x) = \dfrac{3x-2}{ln\, x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

30 $f(x) = \dfrac{4x+1}{x^2-4} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

2.3 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA. REGLA DE LA CADENA

$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Las reglas de derivación aplicadas a funciones compuestas quedan así:

- $F(x) = (f(x))^n \quad \rightarrow \quad F'(x) = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
- $F(x) = sen\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = cos\,(f(x)) \cdot f'(x)$
- $F(x) = cos\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = -sen\,(f(x)) \cdot f'(x)$
- $F(x) = tg\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = (1 + tg^2\,(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{f'(x)}{cos^2\,(f(x))}$
- $F(x) = e^{f(x)} \quad \rightarrow \quad F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $F(x) = a^{f(x)} \quad \rightarrow \quad F'(x) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot ln\,a$
- $F(x) = ln\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $F(x) = log_a\,(f(x)) \quad \rightarrow \quad F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{ln\,a}$

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 3x)^7$

b) $g(x) = sen^3\,x = (sen\,x)^3$

c) $h(x) = ln^3\,(x^2 + 3) = [ln\,(x^2 + 3)]^3$

RESOLUCIÓN

a) $f'(x) = 7\,(x^2 - 3x)^6 \cdot (2x - 3) = (14x - 21)\,(x^2 - 3x)^6$

b) $g'(x) = 3\,sen^2\,x \cdot cos\,x$

c) $h'(x) = 3\,[ln\,(x^2 + 3)]^2 \cdot \dfrac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x = \dfrac{6x\,ln^2\,(x^2 + 3)}{x^2 + 3}$

Halla la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = (x^2 + 5)^6 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$
2. $f(x) = sen\,(x^2 - 1) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$
3. $f(x) = cos\,(ln\,x) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

4. $f(x) = tg\,(2x - 3x^2) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

5. $f(x) = e^{3x^2 + 1} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

6. $f(x) = 2^{4x + 1} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

7. $f(x) = cos^2 x \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

8. $f(x) = e^{3x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

9. $f(x) = ln\,(3x^2 - 6) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

10. $f(x) = ln\left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

11. $f(x) = e^{4x + 2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

12. $f(x) = sen\,(e^x) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

13. $f(x) = cos\left(\frac{x}{4} + 2\right) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

14. $f(x) = sen\,(3x^2 - 1)^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

15. $f(x) = sen^2\,(3x^2 - 1) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

16. $f(x) = 3^{\cos x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

17. $f(x) = ln\left(\frac{x + 1}{x - 2}\right) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

18. $f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

20. $f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

21. $f(x) = \frac{(2x + 1)^2}{x - 1} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

22. $f(x) = \frac{(3x - 1)^2}{2x + 1} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

23. $f(x) = \frac{e^x}{(x - 1)^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

24. $f(x) = \left(\frac{3x - 2}{4}\right)^5 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

25. $f(x) = \frac{3x}{(x - 1)^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

26. $f(x) = \frac{2x^2}{(3x - 2)^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

2.4 EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN

Halla la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{2}{3}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

2. $f(x) = \dfrac{x^5}{3} - \dfrac{2}{x^2} + 3$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{5}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

4. $f(x) = (3x - 2)\, e^x$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

5. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt{5}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3} + 2x^2$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2} - \dfrac{x^2 - 1}{3}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

8. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^4 + 2x + 1}{x}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

9. $f(x) = \dfrac{3}{2x^2} - \dfrac{2x^2}{3} + \ln 5$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{x^3}} - \dfrac{x^2}{3} + \sqrt{2}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

11. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3 \ln x}{2}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

12. $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

13. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 1}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 1}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

15. $f(x) = (x^2 - 1)\, e^x - \ln x$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

16. $f(x) = 2^x - 3 \operatorname{tg} x$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

17. $f(x) = x^3 e^x + x^2 \operatorname{sen} x$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

18. $f(x) = \dfrac{x - 1}{3x - 2}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$ $\rightarrow$ $f'(x) =$

20. $f(x) = (x^2 - 1)^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

21. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

22. $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

23. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^3} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

24. $f(x) = ln\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

25. $f(x) = cos^2\,(3x-2) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

26. $f(x) = \sqrt{sen\ x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

27. $f(x) = ln\,(sen\ x^2) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

28. $f(x) = e^{4x-1} \cdot sen\,(3x^2) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

29. $f(x) = 2^{4x^2-1} \cdot ln\,(8x) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

30. $f(x) = \dfrac{(2x+3)^2}{1-x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

31. $f(x) = tg\left(\dfrac{2}{x-3}\right) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

32. $f(x) = \dfrac{e^{5x+1}}{x+2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

33. $f(x) = \dfrac{ln^2 x}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

34. $f(x) = \dfrac{x\,e^x}{x+2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

35. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{3x+4} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

36. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+1}{x+2}} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

37. $f(x) = \dfrac{sen\ x}{x-2} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

38. $f(x) = ln\left(\dfrac{2x-1}{3x+4}\right) \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

39. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1} \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

40. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,(x^2-1)}{5} + ln\ 4 \quad \rightarrow \quad f'(x) =$

3 APLICACIONES DE LA DERIVADA

3.1 CÁLCULO DE LA DERIVADA EN UN PUNTO

La derivada de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente** a la curva en ese punto, y mide el **crecimiento** o **decrecimiento** de la función en ese lugar.

Cálculo del valor de la derivada en varios puntos $x = a$, $x = b$, ...:

- Se obtiene la expresión general de $f'(x)$.
- Se sustituye en $f'(x)$ la x por a, b, ...

EJERCICIO RESUELTO

Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}$ ***en los puntos de abscisas 1, 1/2 y –1.***

Interpreta los resultados.

RESOLUCIÓN

Aplicamos las reglas de derivación para obtener $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}} \cdot \frac{3x-(3x-1)}{x^2} = \frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{3x-1}}$$

Sustituimos x por 1, 1/2 y –1:

- $f'(1) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ es la pendiente de la tangente a la curva en $x = 1$
  La función crece $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ en $x = 1$.
- $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2 \cdot 1/4}\sqrt{\dfrac{1/2}{3/2-1}} = 2$; Pendiente de la tangente en $x = 1/2$: $m = 2$
  La curva crece 2 en $x = 1/2$.
- $f'(-1) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-1}{-4}} = \dfrac{1}{4}$; Pendiente de la tangente en $x = -1$: $m = 1/4$
  La curva crece 1/4 en $x = -1$.

---

1 Halla la derivada de la función $y = \dfrac{5x - x^2}{x-2}$ en los puntos de abscisa –1, 3 y 5.

2 Halla la derivada de la función $y = \left(\dfrac{x}{3} + 1\right)^4$ en los puntos de abscisa –4, –3, 0 y 1.

3 Calcula $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f'(3)$ siendo $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

4 Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = ln\sqrt{x}$ en los puntos de abscisa 1, 2, 3 y 4.

5 Calcula el crecimiento y el decrecimiento de la función $y = sen\ x$ en los puntos de abscisa $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ y π.

6 Dada la función $y = x\,e^{2x+1}$, halla:

a) La pendiente de la recta tangente en los puntos de abscisa -2, $-\frac{1}{2}$, 0 y 1.

b) Indica si la función es creciente o decreciente en esos puntos.

7 Halla la derivada de la función $y = \sqrt{2x^2 + 1}$ en los puntos de abscisa -2, 0 y 1 e indica si la función es creciente o decreciente en esos puntos.

8 Calcula la pendiente de la recta tangente a la función $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ en los puntos de abscisa 2, 7 y -1.

9 Halla la función derivada de la función $y = ln\,\frac{x-3}{x+2}$ y su valor en los puntos de abscisa 4, -3 y 6. Interpreta los resultados obtenidos.

3.2 ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

Para obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0, haremos:

- Cálculo de la ordenada del punto de tangencia $y = f(x_0)$, $P(x_0, f(x_0))$.
- Pendiente de la recta tangente: $f'(x_0)$ (valor de la derivada en $x = x_0$).
- Ecuación en forma punto-pendiente: $\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$.

EJERCICIO RESUELTO

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ ***en el punto de abscisa*** $x = 1$.

RESOLUCIÓN

- Hallamos la ordenada del punto de tangencia: $f(1) = \dfrac{1}{1^2 + 1} = \dfrac{1}{2}$
- Derivamos la función: $y' = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$
- Calculamos la pendiente de la recta tangente: $m = f'(1) = -\dfrac{1}{2}$
- Escribimos la ecuación: $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(x - 1) \quad \rightarrow \quad x + 2y - 2 = 0$

1 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ en los puntos de abscisa -1, 0 y 2.

2 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{3x^2 - 1}{2x + 1}$ en los puntos de abscisa -2 , 0 y 1.

3 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \sqrt{x^2 + 3}$ en los puntos de abscisa -1, 0 y 3.

4 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1 - \cos x$ en los puntos de abscisa $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ y π.

5 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = ln\,(x - 1)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

6 Halla la ecuación de la recta tangente, en el punto de abscisa $x = 0$, a las siguientes funciones:

a) $y = sen\,x$

b) $y = ln\,(x + 1)$

c) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

7 Halla los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $y = x^3 - 4x$ y escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a dicha función en los puntos obtenidos.

8 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 3x - 7$ en el punto donde corta al eje de ordenadas.

9 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes, en los siguientes casos:

a) $y = \sqrt{4 + x^2}$ en $x = \dfrac{3}{2}$

b) $y = \sqrt{2x - x^2}$ en $x = 1$

c) $y = cos\,x$ en $x = 0$

d) $y = ln\,(x^2 - 1)$ en $x = \sqrt{2}$

e) $y = e^{\frac{x-1}{x}}$ en $x = 1$

f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$ en $x = 2$

3.3 OBTENCIÓN DE PUNTOS EN LOS QUE LA DERIVADA TIENE UN CIERTO VALOR

Para averiguar los valores de x para los cuales $f'(x) = k$ se procede así:

- Se obtiene la expresión general de $f'(x)$.
- Se resuelve la ecuación $f'(x) = k$.

EJERCICIO RESUELTO

Halla los puntos de la función $y = \dfrac{2x}{x+1}$ ***en los que la derivada es igual a 2.***

RESOLUCIÓN

Obtenemos la función derivada: $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 2$: $\dfrac{2}{(x+1)^2} = 2 \rightarrow (x+1)^2 = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right.$

Calculamos las ordenadas de esos puntos:

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0 \; ; \qquad f(-2) = \frac{2(-2)}{-2+1} = 4$$

Los puntos buscados son $(0, 0)$ y $(-2, 4)$.

1 Halla los puntos de la función $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} - 3x$ en los que su derivada es igual a 3.

2 Encuentra los puntos de la función $y = x^3 - 7x$ que verifican $f'(x) = 5$.

3 Halla los puntos de la función $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ en los que la derivada es igual a -1.

4 Halla los puntos de la función $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$ en los que la derivada es igual a 0.

EJERCICIO RESUELTO

Dada la función $y = \sqrt{4 + x^2}$, halla:

a) Los puntos donde la recta tangente es paralela a r: $3x - 5y - 15 = 0$.

b) Las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos.

RESOLUCIÓN

a) La pendiente de la recta tangente, en los puntos que buscamos, debe ser igual a la de r: $m_r = \frac{3}{5}$

Por tanto, hemos de resolver la ecuación $f'(x) = \frac{3}{5}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{3}{5} \rightarrow 5x = 3\sqrt{4+x^2} \rightarrow 25x^2 = 36 + 9x^2$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2}. \text{ No verifica la ecuación. No es solución.} \\ x = \frac{3}{2} \rightarrow f(3/2) = \sqrt{4 + (3/2)^2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

En el punto $(3/2, 5/2)$ la recta tangente es paralela a r.

b) Escribimos la ecuación en forma punto pendiente:

$$P(3/2, 5/2),\ m = \frac{3}{5} \rightarrow y = \frac{5}{2} + \frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

---

5 Halla los puntos en los que la recta tangente a la función $y = \frac{1}{8}x^4 - 4x$ es paralela a la recta $8x + y = 0$.

6 Halla los puntos de la función $y = \frac{2x+1}{x-2}$ en los que la pendiente de la recta tangente es igual a $-\frac{1}{5}$.

7 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = 3x^3 - 4$ paralelas a la recta r: $9x - 4y + 6$.

8 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ paralelas al eje X.

9 Comprueba que no existe ningún punto de la función $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ en el que la recta tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

3.4 PUNTOS SINGULARES

- **Puntos singulares** de una función $y = f(x)$ son los puntos de tangente horizontal, es decir, los puntos en los que la derivada es igual a cero.
- Entre ellos están los máximos y los mínimos, pero puede haber otros.
- Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

EJERCICIO RESUELTO

Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ***b)*** $y = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2}$

RESOLUCIÓN

a) Hallamos: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$6(x^2 - x - 2) = 0$. Soluciones $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ Calculamos las ordenadas $\begin{cases} f(-1) = 7 \\ f(2) = -20 \end{cases}$

Los puntos singulares son $(-1, 7)$ y $(2, -20)$.

b) $$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + x - 2) - (2x + 1)(x^2 + 2x - 4)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{-x^2 + 4x}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff \dfrac{-x^2 + 4x}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \iff -x^2 + 4x = 0.$ Soluciones $\begin{cases} x = 0;\ f(0) = 2 \\ x = 4;\ f(4) = \dfrac{10}{9} \end{cases}$

Los puntos singulares son $(0, 2)$ y $\left(4, \dfrac{10}{9}\right)$.

Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

1 a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ b) $y = -3x^4 + 4x^3$

2 a) $y = x^2(1 - x)$ b) $y = x^3 + x^2 - x$

3 a) $y = x^4 - 4x + 2$ b) $y = x^3 - 2x^2 + 1$

4 a) $y = x^4 - 8x^2 + 1$ b) $y = \dfrac{(x - 2)^5}{16}$

5 Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares:

a) $y = x^3 + 2x$ b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x$

Halla, si existen, los puntos singulares de las siguientes funciones:

6 a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x}$

7 a) $y = \dfrac{4x^2 - 1}{2x}$ b) $y = \dfrac{3x^2 - 7}{x^2 + 5x + 6}$

8 a) $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 2}$ b) $y = \dfrac{4 - 2x^2}{x}$

9 a) $y = sen\, x,\ x \in [0, 2\pi)$ b) $y = cos\, x,\ x \in [0, 2\pi)$

10 a) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ b) $y = x\, e^{2x}$

11 a) $y = ln\,(x^2 + 1)$ b) $y = \dfrac{ln\, x}{x}$

12 a) $y = \sqrt{4x - x^2}$ b) $y = \dfrac{1}{x} + ln\, x$

13 a) $y = x^2\, e^{-x}$ b) $y = \dfrac{x}{e^x}$

3.5 OBTENCIÓN DE TRAMOS EN DONDE LA CURVA CRECE O DECRECE

Si $f'(x) > 0$, la función es creciente.

Si $f'(x) < 0$, la función es decreciente.

Resolviendo cualquiera de esas inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

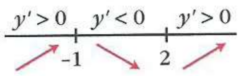
EJERCICIO RESUELTO

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

RESOLUCIÓN

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Resolvemos la inecuación $6x^2 - 6x - 12 > 0$:

$6x^2 - 6x - 12 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow 6(x + 1)(x - 2) > 0 \rightarrow$ Soluciones: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$



Intervalo de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(-1, 2)$

El punto $(-1, 7)$ es un **máximo** porque la función crece a la izquierda de $x = -1$ y decrece a la derecha de ese punto.

$(2, -20)$ es un **mínimo**: la curva decrece a la izquierda de $x = 2$ y crece a la derecha de $x = 2$.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones e indica si sus puntos singulares son máximos o mínimos:

1 a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ b) $y = -3x^4 + 4x^3$

2 a) $y = x^2(1 - x)$ b) $y = x^3 + x^2 - x$

3 a) $y = x^4 - 8x^2 + 1$ b) $y = \dfrac{(x-2)^5}{16}$

4 a) $y = x^3 + 2x$ b) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x$

EJERCICIO RESUELTO

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = \dfrac{x^2+2}{x}$.
Indica si sus puntos singulares son máximos o mínimos.

RESOLUCIÓN

$$y' = \frac{x^2+2}{x^2};\quad f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2 = 0 \;\left\langle \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \;\rightarrow\; f(-\sqrt{2}) = \dfrac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \;\rightarrow\; f(\sqrt{2}) = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$f'(x) > 0;\ \dfrac{x^2-2}{x^2} > 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2 > 0$ (x^2 es positivo para cualquier $x \neq 0$)

$x^2 - 2 > 0 \;\rightarrow$ Soluciones:

$$\begin{array}{ccccc} y'>0 & & y'<0 & & y'>0 \\ \nearrow & -\sqrt{2} & \searrow & \sqrt{2} & \nearrow \end{array}$$

Intervalo de crecimiento:
$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Intervalo de crecimiento: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

El punto $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ es un máximo y $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ es un mínimo.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones e indica si sus puntos singulares, si los tienen, son máximos o mínimos:

5 a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

6 a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ b) $y = \dfrac{x+4}{x-1}$

7 a) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

8 a) $y = \dfrac{x^2+4}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

9 a) $y = \dfrac{x^2-2}{x^2+2x}$ b) $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$

10 a) $y = \sqrt{x-4}$ b) $y = \sqrt{x^2+1}$

3.6 APLICACIONES DE LA DERIVADA. PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN

EJERCICIO RESUELTO

Halla a, b y c en $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ de modo que f tenga un máximo de $x = 1$ y un mínimo en $\left(2, \frac{-10}{3}\right)$.

RESOLUCIÓN

Necesitamos tres condiciones para determinar a, b y c:

- Si f tiene un máximo en $x = 1$, se verifica que $f'(1) = 0$:

  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \longrightarrow \quad \mathbf{3a + 2b + c = 0}$

- Por tener un mínimo en $(2, -10/3)$, sabemos que $f'(2) = 0$ y que la curva pasa por ese punto, es decir, $f(2) = -10/3$:

  $f'(2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{12a + 4b + c = 0}$

  $f(2) = -10/3 \quad \longrightarrow \quad 8a + 4b + 2c - 4 = -10/3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{4a + 2b + c = 1/3}$

  Resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{ll} 3a + 2b + c = 0 & (2^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}}): 9a + 2b = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 & (3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}}): a = 1/3 \\ 4a + 2b + c = 1/3 & \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \end{array}$

  La función que cumple las condiciones dadas es:

  $$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4$$

---

1 Halla a, b, y c en $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ de forma que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = 1$ y $x = 2$, y pase por el punto $(6, 26)$.

2 Calcula los coeficientes de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, que es tangente a la recta $2x - y - 2 = 0$ en el punto $(3, 4)$, y que pasa por el origen de coordenadas.

☛ *f pasa por $(3, 4)$ y $(0, 0)$, y $f'(3) = 2$ (pendiente de la recta tangente).*

3 Halla un polinomio de segundo grado que pase por el origen de coordenadas y por el punto $(5, 10)$, y que tenga un mínimo en $x = -1/2$.

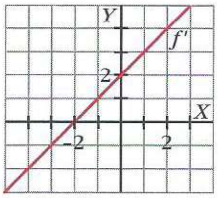
4 La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ es $3x - 2y + 6 = 0$. Calcula $f(1)$ y $f'(1)$.

5 Halla los puntos de curvas $f(x) = x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 7x - 3$ en los que las rectas tangentes a f y a g son paralelas.

En esos puntos se cumple que $f'(x) = g'(x)$.

6 a) Determina el punto de la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ en el que la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(0, -3)$ y $B(2, 1)$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en ese punto.

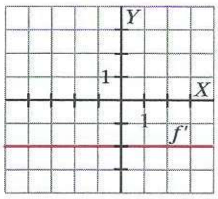
7 

Observa la gráfica de f', que es la función derivada de f.

a) Di cuál es la abscisa del punto singular de f.

b) Señala los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Indica si el punto singular de f es máximo o mínimo.

8 

Esta es la gráfica de la función derivada de f.

a) ¿Tiene f algún punto singular?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

9 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo $(0, \pi)$:

a) $y = 1 - sen\, x$ b) $y = 1 + cos\, x$ c) $y = tg\, x$

10 Estudia el crecimiento de las siguientes funciones:

a) $y = x\, e^{-x}$ b) $y = \dfrac{e^x}{2x}$

c) $y = ln\,(x^2 + 1)$ d) $y = e^{-x^2}$

4 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

4.1 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

- Son de la forma $y = P(x)$, donde $P(x)$ es un **polinomio.** Por ejemplo: $y = -\frac{1}{3}x^2 + 5x - 1$
- Están definidas y son **continuas** en $\mathbb{R}$. Tienen dos **ramas infinitas** (en $-\infty$ y en $+\infty$).

Representación:

- Se hallan sus ramas infinitas: $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$
- Se resuelve la ecuación $P'(x) = 0$: las soluciones son las abscisas de los puntos singulares. Se hallan las ordenadas, $y = P(x)$.
- Se señalan los puntos singulares y se unen con las ramas infinitas.
- Conviene obtener los puntos de corte con los ejes, si es posible, para conseguir mayor precisión en la representación.

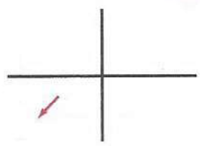
EJERCICIO RESUELTO

Representa la función $y = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4$.

RESOLUCIÓN

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} (-x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4) = -\infty$$



- Puntos singulares:

$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 6x + 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 - 6x^2 + 6x + 4 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & -4 & -6 & 6 & 4 \\ 1 & & -4 & -10 & -4 \\ \hline & -4 & -10 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x_1 = 1$

$-4x^2 - 10x - 4 = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x_2 = -2 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

$x_1 = 1 \quad \to \quad f(1) = -1 - 2 + 3 + 4 - 4 = 0$

$x_2 = -2 \quad \to \quad f(-2) = -16 + 16 + 12 - 8 - 4 = 0$

$x_3 = -\frac{1}{2} \quad \to \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 - 4 = -\frac{81}{16}$

Los puntos singulares son $(1, 0)$, $(-2, 0)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{81}{16}\right)$.

Los dos primeros son máximos.

El tercero es mínimo.

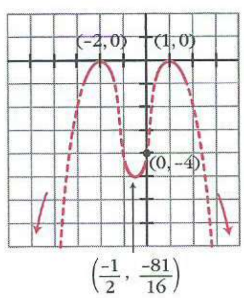
- Cortes con los ejes:

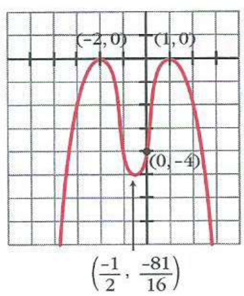
Con el eje X: $f(x) = 0$

$-x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \to (1, 0) \\ x = -2 \to (-2, 0) \end{array} \right.$

Con el eje Y: $x = 0$

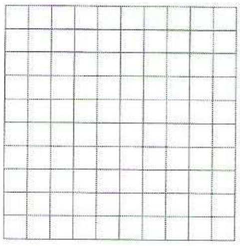
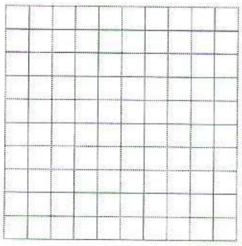
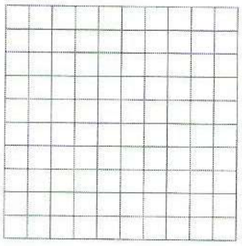
$y = -4 \quad \to \quad (0, -4)$



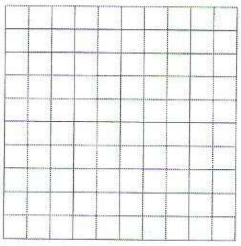
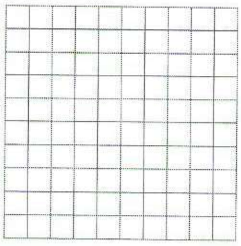
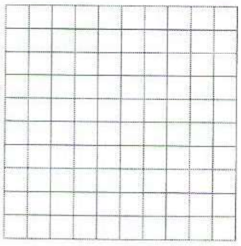


Representa las siguientes funciones:

1 a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ b) $y = x^2(1 - x)$ c) $y = x(x^2 + x - 1)$

2 a) $y = x^4 - 8x^2 + 1$ b) $y = x^4 - 4x + 2$ c) $y = x^3 - 2x^2 + 1$

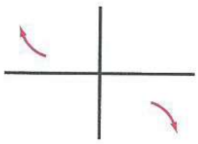
EJERCICIO RESUELTO

Representa la función $y = 2 + (1 - x)^3$.

Resolución

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to -\infty} (2 + (1 - x)^3) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} (2 + (1 - x)^3) = -\infty$$



- Puntos singulares:

$f'(x) = -3(1 - x)^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

$x = 1 \rightarrow f(1) = 2$ Hay un solo punto singular: $(1, 2)$

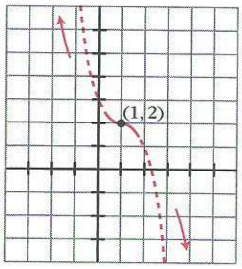
- Cortes con los ejes:

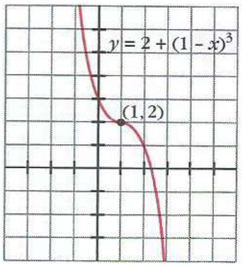
$x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow (0, 3)$

$f(x) = 0 \rightarrow 2 + (1 - x)^3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (1 - x)^3 = -2 \rightarrow x = 2{,}26 \rightarrow (2{,}26;\ 0)$

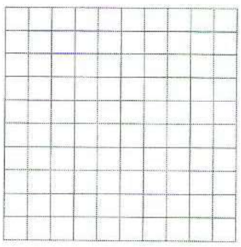
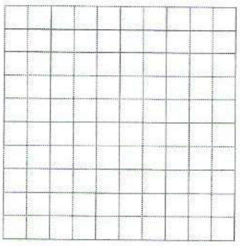
- El punto singular $(1, 2)$ no es ni máximo ni mínimo.





3 Representa las siguientes funciones:

a) $y = 1 - x^3$ b) $y = \dfrac{(x - 2)^5}{16}$

Representa las siguientes funciones eligiendo la escala adecuada en cada eje:

4 a) $y = \dfrac{x^3 + 8}{8}$

b) $y = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{3}{2}x^2 - 2$

5 a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

b) $y = -x^3 - x^2 - \dfrac{1}{3}x + 4$

6 a) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$

b) $y = \dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{9}{10}$

7 a) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

b) $y = 4x\,(x - 1)^3$

8 a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 4$

b) $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 6x + 5$

Representa las siguientes funciones:

9 a) $y = -3x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 2$ b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 12x - 1$ c) $y = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 - \frac{1}{10}$

10 a) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 3$ b) $y = \frac{1}{5}\ x^5 + \frac{1}{4}\ x^4 + 2x^3$ c) $y = 3x^5 + 5x^3 - 3$

11 Supongamos que existe una función polinómica de la que sabemos:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $f'(x) = 0$ en $x = 2$, $x = 0$ y $x = 3$;

$f(-2) = 0$, $f(0) = 2$ y $f(3) = 5$.

Represéntala gráficamente.

12 Supongamos que existe una función polinómica de la que sabemos:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = 0$ solo en $x = -1$,

$x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$; $f(-1) = 3$, $f(1) = 1$, $f(3) = 5$ y $f(5) = 4$.

Dibuja su gráfica.

13 Supongamos que existe una función polinómica de la que sabemos:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f'(x) = 0$ solo en $x = 0$ y $x = 4$;

$f(0) = 3$ y $f(4) = 6$.

Dibuja su gráfica.

4.2 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

- Son de la forma $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.
- No están definidas en los puntos donde $Q(x) = 0$.

Representación:

La función $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ debe estar simplificada.

Asíntotas verticales: $x = a$. Se obtienen igualando a cero el denominador. Se estudia la posición de la curva respecto a ellas.

Asíntotas horizontales

Si *grado* $P(x) \leq$ *grado* $Q(x)$, hay asíntota horizontal, $y = b$, donde $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Se estudia la posición de la curva respecto a ellas.

Asíntotas oblicuas

Si *grado* $P(x)$ = *grado* $Q(x) + 1$, hay asíntota oblicua, $y = mx + n$, donde $mx + n$ es el cociente de $P(x) : Q(x)$. Se estudia la posición de la curva respecto a ellas.

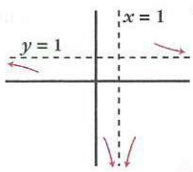
Si *grado* $P(x)$ > *grado* $Q(x) + 1$, no hay asíntotas horizontales ni oblicuas. Hay ramas infinitas en $\pm\infty$. Se hallan.

Puntos singulares: Sus abscisas son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

Conviene obtener los puntos de corte con los ejes si se quiere más precisión.

EJERCICIO RESUELTO

Representa la función $y = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$ ***de la cual conocemos sus asíntotas,*** $x = 1$ ***e*** $y = 1$***, y la posición de la curva respecto a ellas.***



RESOLUCIÓN

La observación del dibujo nos indica que tiene que haber un máximo a la derecha de $x = 1$, y que la curva corta a la asíntota horizontal.

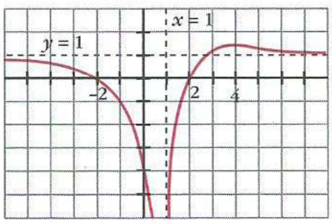
Puntos singulares: $f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-4)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1) - 2(x^2-4)}{(x-1)^3} = \frac{-2x+8}{(x-1)^3}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 8 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow f(4) = \frac{4}{3} \rightarrow \text{Máximo relativo } (4, 4/3)$$

Cortes con los ejes:

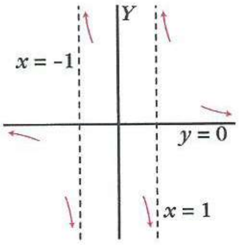
$y = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (2, 0), (-2, 0)$

$x = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (0, -4)$

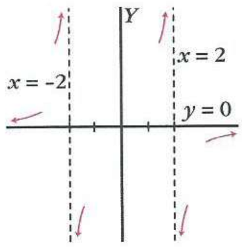


Representa las siguientes funciones de las que conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas:

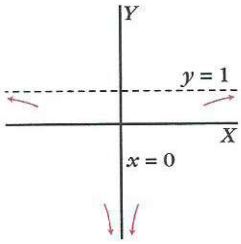
1 a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$



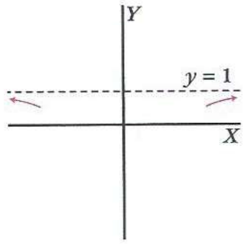
b) $y = \dfrac{1 - x}{x^2 - 4}$



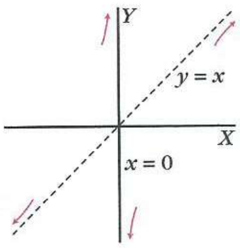
2 a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$



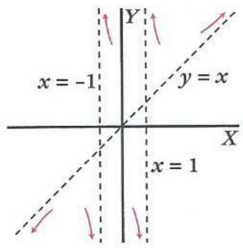
b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



3 a) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$



b) $y = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 1}$



EJERCICIO RESUELTO

Representa la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

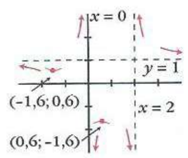
RESOLUCIÓN

- $x^2 - 2x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$ No está definida en $x = 0$ y en $x = 2$.

- Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 2$

  Posición: Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$ Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$ Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$



- Asíntota horizontal: $y = 1$

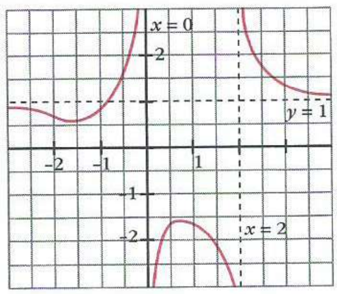
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = 1$, Posición: Si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$; $f'(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 \simeq 0{,}6;\ f(0{,}6) \simeq -1{,}6 \\ x_2 \simeq -1{,}6;\ f(-1{,}6) \simeq 0{,}6 \end{array} \right.$

  No corta al eje X ni al eje Y.



Representa las siguientes funciones:

4 a) $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2x}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ c) $y = \dfrac{2x + 3}{1 - x}$

5 a) $y = \dfrac{x^2}{(x - 1)^2}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2}$ c) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{4x - x^2}$

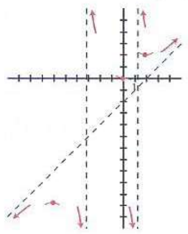
EJERCICIO RESUELTO

Representa la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x - 4}$.

RESOLUCIÓN

La función no está definida en los puntos donde el denominador se anula:

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \begin{cases} x = -1 + \sqrt{5} \simeq -1,2 \\ x = -1 - \sqrt{5} \simeq -3,2 \end{cases}$$



Asíntotas verticales: $x = 1,2$ y $x = -3,2$

Posición: $x = 1,2 \begin{cases} x \to 1,2^-;\ f(x) \to -\infty \\ x \to 1,2^+;\ f(x) \to +\infty \end{cases}$

Posición: $x = -3,2 \begin{cases} x \to -3,2^-;\ f(x) \to -\infty \\ x \to -3,2^+;\ f(x) \to +\infty \end{cases}$

Asíntota oblícua: Dividimos x^3 entre $x^2 + 2x - 4$:

$y = x - 2 + \dfrac{8x - 8}{x^2 + 2x - 4}$; $y = x - 2$ es la asíntota oblicua.

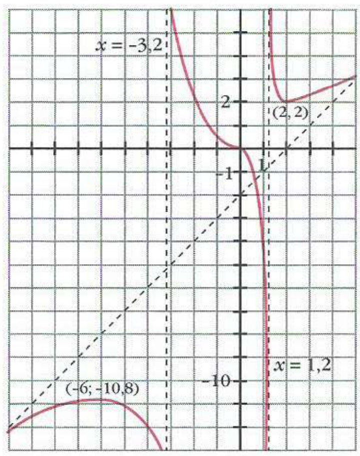
Posición: Si $x \to +\infty$ Curva sobre asíntota

Si $x \to -\infty$ Curva bajo asíntota

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{x^4 + 4x^3 - 12x^2}{(x^2 + 2x - 4)^2}\ ;\ f'(x) = 0 \begin{cases} x = 0;\ f(0) = 0 \\ x = 2;\ f(2) = 2 \\ x = -6;\ f(-6) = -10,8 \end{cases}$$

Son (0, 0), (2, 2), mínimo, y (–6; –10,8), máximo.



Representa las siguientes funciones:

6 Representa las funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x}$

b) $y = \dfrac{4x^2 - 1}{2x}$

7 a) $y = \dfrac{2x^2}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{(x^3 - 1)^2}{x}$

8 a) $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 2}$

b) $y = \dfrac{4 - 2x^2}{x}$

9 a) $y = \dfrac{x^3}{3\,(x + 1)}$

b) $y = \dfrac{4 + 2x^2 - x^3}{x^2}$

c) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

10 a) $y = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$

b) $y = \dfrac{x^5}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{2x + 3}$