6. Límites y continuidad

1 Idea intuitiva de límite

1. Utiliza una tabla de valores para estimar los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

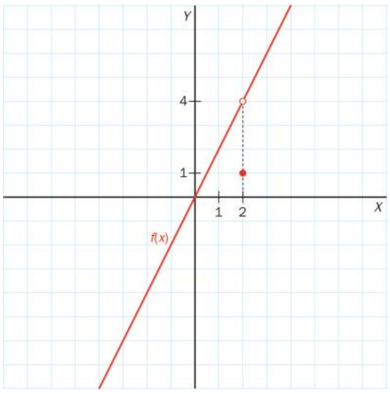
b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=2$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0,25$

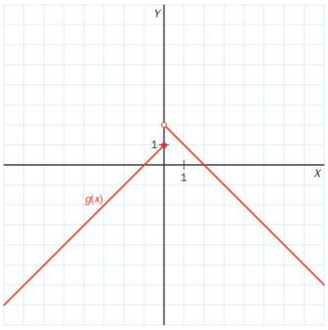
2. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones y utilízalas para averiguar si existe el límite en los puntos indicados.

a) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$ en $x = 2$ b) $g(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq 0\\ -x+2, & x>0\end{cases}$ en $x = 0$

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$



b) $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe



2 Límites laterales

3. Estudia si existe el límite en x = 2 de la función: $f(x)=\begin{cases} 4-x, & \text{si } x\le 2 \\ x^2-2, & \text{si } x>2 \end{cases}$

Como lo dos límites laterales existen y son iguales, entonces

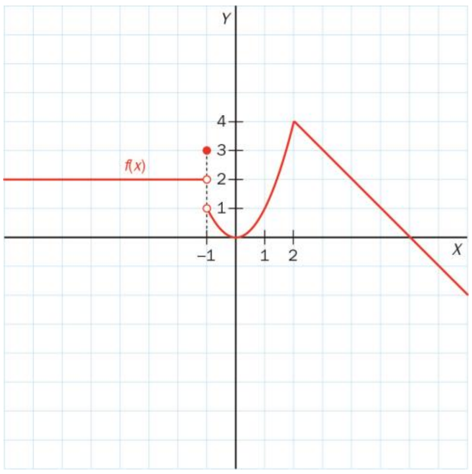
$$\lim_{x\to 2} f(x)=2$$

4. Estudia si existe el límite en x = 0 de la función: $f(x)=\begin{cases} -x+2, & \text{si } x<0 \\ 1, & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

Como lo dos límites laterales son distintos en dicho punto, entonces: ó $\lim_{x\to 0} f(x)$

5. Dada la función, dibújala y estudia la existencia de límite en x=-1 y x=2.

$$f(x)=\begin{cases} 2, & \text{si } x<-1 \\ 3, & \text{si } x=-1 \\ x^2, & \text{si } -1<x<2 \\ 6-x, & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$



- $x=-1$

ó $\lim_{x\to -1} f(x)$

- $x=2$

$\lim_{x\to 2} f(x)=4$

4 Cálculo de límites en un punto. Indeterminaciones

6. Utiliza una tabla de valores para estimar:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$ b) $\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}$ c) $\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2)$

a) $\nexists \lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$

b) $\nexists \lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}$

c) $\lim_{x\to 2^+}(\ln(x-2))=-\infty$

7. Halla el valor del límite de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x-2}{x^3-x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-8}{x}$ c) $\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}$

a) $\nexists \lim_{x\to -1}\frac{x^3-x-2}{x^3-x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x+8-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+6x+12)=12$$

c) $\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación) $\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(2-x)(2+x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2-x)=4$

8. Calcula estos límites, indicando en cada caso si se trata de una indeterminación y el procedimiento para resolverla.

a) $\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2-16}$ b) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{|x-3|}$ c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

a) $\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2-16}=\frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Como se trata de una función racional para resolver la indeterminación $\frac{0}{0}$ descomponemos en factores el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2-16}=\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to -4}\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{8}$$

b) $|x-3| = \begin{cases} -(x-3), \text{ si } x<3 \\ x-3 \quad , \quad x \geq 3 \end{cases}$

Como *x* tiende a 3 por la derecha (x>3), entonces

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} 1 = 1$$

c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Como es una función racional para resolver la indeterminación $\frac{0}{0}$ descomponemos en factores el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2-x+1) = 3$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Es una función que contiene radicales en el numerador y, por tanto, para resolver la indeterminación $\frac{0}{0}$ multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del numerador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+2)-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

6 Cálculo de límites en el infinito

9. Calcula estos límites, indicando en cada caso si se trata de una indeterminación y el procedimiento para resolverla:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+5x}{2x^3-x^2-1}$ b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+3x}{x^3-5x+2}$ c) $\lim_{x\to +\infty} \left(x-\sqrt{x}\right)$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{5x-2}$ e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}$ f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3}{4x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1}\right)$

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+5x}{2x^3-x^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$ (Indeterminación)

Como es una función racional para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ dividimos numerador y denominador por la mayor potencia del denominador (x^3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+5x}{2x^3-x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1+0}{2-0-0}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+3x}{x^3-5x+2}=\frac{\infty}{\infty}$ (Indeterminación)

Procedemos de forma análoga al apartado anterior dividimos por la mayor potencia del denominador (x^3).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+3x}{x^3-5x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{+\infty+0}{1-0+0}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$ (Indeterminación)

Para resolver esta indeterminación $\infty-\infty$ de una función con radicales multiplicamos y dividimos por la expresión radical conjugada ($x+\sqrt{x}$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$ (Indeterminación)

Ahora dividimos numerador y denominador por la mayor potencia del denominador (x).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}=\frac{+\infty-1}{1+0}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{5x-2}=\frac{\infty}{\infty}$ (Indeterminación)

A efectos de resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, consideraremos una función racional a pesar de contener radicales en el numerador. Por consiguiente, dividiremos numerador y denominador por la mayor potencia del denominador (x).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{5x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{5-\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{2+0}}{5-0}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ (Indeterminación). Dividimos numerador y denominador por la mayor potencia del denominador (x).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\infty-\infty$ (Indeterminación). Para resolver esta indeterminación $\infty-\infty$ efectuaremos operaciones para convertirla en una única fracción algebraica.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2(2x-1)}{4x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+x^2}{4x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}\text{ (Indeterminación)}$$

Ahora, dividiremos por la mayor potencia del denominador (x^2) .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+x^2}{4x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{4-\frac{1}{x^2}}=\frac{-\infty+1}{4-0}=\frac{-\infty}{4}=-\infty$$

10. Margen de ventas. Si los ingresos (€) obtenidos por la venta de un producto de moda depende de su precio y viene dado por la función:

$$I(p)=4000pe^{-0{,}05p}$$

a) ¿Qué ingresos obtiene cuando el precio del producto es de 50 €? ¿Y cuándo es de 100 €? ¿Qué observas?

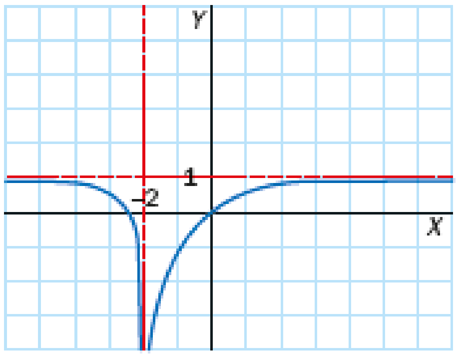
b) ¿Le resulta beneficioso incrementar el precio mucho más? ¿Por qué?

a) Si el precio del producto es de 50 € el comerciante obtiene unos ingresos de aproximadamente 16417 €. Cuando el precio del producto se dobla hasta los 100 €, entonces los ingresos que obtienen disminuyen considerablemente hasta los 1348 €.
Intuimos que al incrementar el precio del producto disminuye de forma considerable los ingresos obtenidos por su venta.

b) Si se aumenta mucho el precio del producto los ingresos por su venta tienden a ser nulos y, en consecuencia, no resulta nada beneficioso incrementar mucho el precio.

11. Observa la gráfica de la función $f(x)$ que aparece dibujada y calcula:

$\lim_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim_{x\to-2^+} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$



- $\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$
- $\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

12. Calcula los límites laterales en $x=2$ de la función $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$.

$$|x-2|=\begin{cases}-(x-2), & \text{si } x<2\\ x-2 \;, & x\geq 2\end{cases}$$

ó $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$

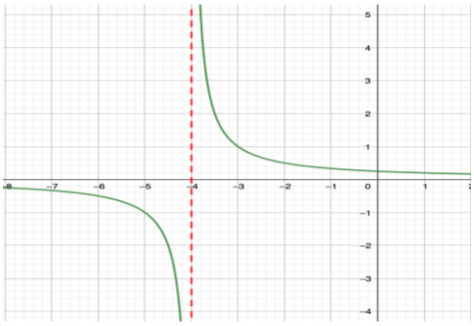
7 Asíntotas

13. Calcula las asíntotas verticales y esboza la gráfica de:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$ b) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ c) $h(x)=\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

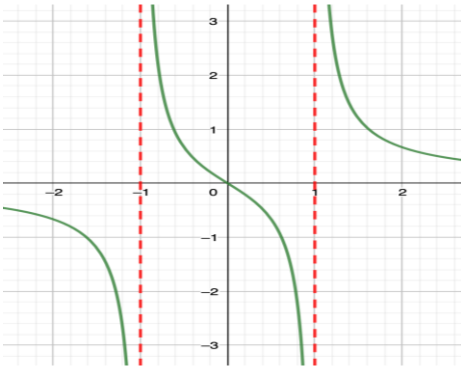
a) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$

$x=-4$ es una asíntota vertical.



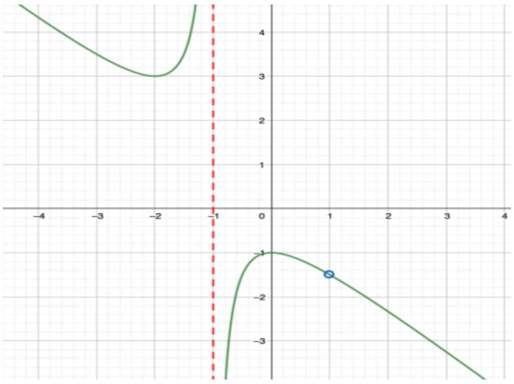
b) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

Las asíntotas verticales son: $x=-1$ y $x=1$.



c) $h(x)=\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

$x=-1$ es una asíntota vertical.



14. Halla todas las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x+3}$

- Asíntotas verticales.

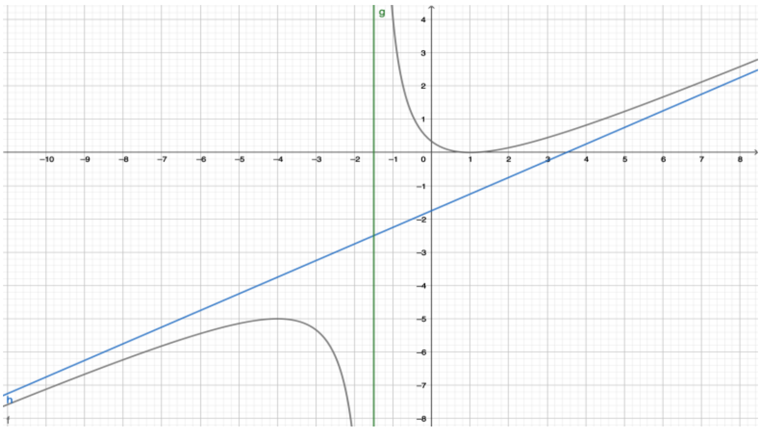
$$x=-\frac{3}{2}$$

- Asíntotas horizontales.

No hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas.

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{4}$ es una asíntota oblicua.



b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

- Asíntotas verticales.

  $x=-1$ es asíntota vertical

- Asíntotas horizontales.

  $y=1$ es una asíntota horizontal.

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$

- Asíntotas verticales.

  $x=-2$

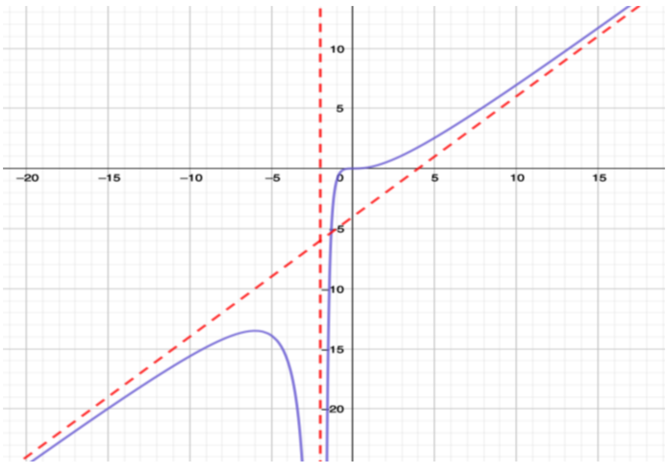
- Asíntotas horizontales.

  No hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas.

  $y=x-4$ es una asíntota oblicua.

  La gráfica es:



8 Continuidad

15. Estudia la continuidad en los puntos indicados y, si presentan alguna discontinuidad, indica de qué tipo es:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}, \text{ si } x\neq 1 \\ 1, \text{ si } x=1 \end{cases}$ b) . . $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, \text{ si } x\neq -1 \\ 2 \quad , \text{ si } x=-1 \end{cases}$

a) En $x=1$ es discontinua inevitable con salto infinito.

b) En $x=-1$ presenta $g(x)$ una discontinuidad evitable y bastaría redefinir $g(-1)=-2$.

16. ¿Cuál de las siguientes funciones presenta una discontinuidad evitable en los puntos indicados?

a) $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x+2}$, $x=-2$ b) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ c) $h(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}$, $x=-1$

a) $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=-2$ y bastaría definir $f(-2)=12.$

b) $g(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x=9$ y y bastaría definir $g(9)=6.$

c) $h(x)$presenta una discontinuidad inevitable en $x=-1$ de salto 2 unidades.

17. Halla el intervalo de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=xe^x$ b) $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+2x-3}$

a) Continua en todo R .

b) Continua en $(0,1)\cup(1,+\infty).$

c) Continua en $\mathrm{R}-\{-3,1\}=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty).$

18. ¿Para qué valor de a la función $f(x)$ es continua en todos los números reales?

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & \text{, si } x<2 \\ ax+5 & \text{, si } x\geq 2 \end{cases}$$

Si $a=-\frac{1}{3}$, entonces la función $f(x)$ es continua en x=2 y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

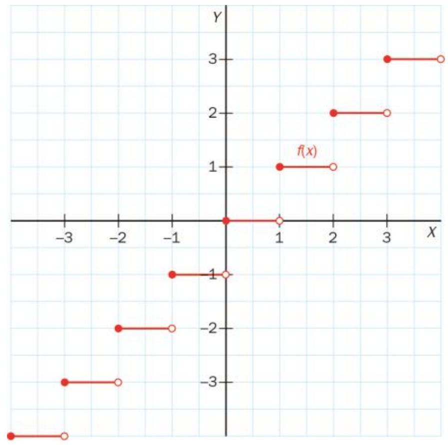
19. Encuentra el valor de a para que f(x) sea continua en x=1.

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{, si } x<1 \\ e^{x-1} & \text{, si } x\geq 1 \end{cases}$$

$a=0$ para que la función la función $f(x)$ sea continua en x=1.

20. Se define la función *f*(*x*)=*E*[*x*], o «parte entera de *x*», como el entero mayor, que sea menor o igual que *x*. Por ejemplo, *E*[2,1] = 2, *E*[3,8] = 3 , *E*[-2,1] = -3, *E*[-3,8] = -4. Dibuja la función y prueba que en los valores enteros no es continua.

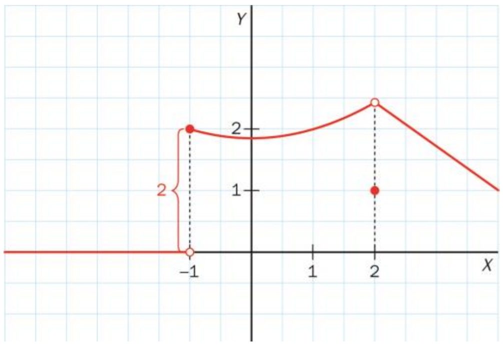
La gráfica de la función $f(x)=E[x]$ es:



En los valores enteros la función es discontinua inevitable con salto 1.

21. Dibuja una función que sea discontinua con salto 2 en *x* = -1, discontinua evitable en *x* = 2 y continua en el resto.

Por ejemplo, una función que cumple las condiciones del enunciado es la siguiente:



Actividades finales

Idea intuitiva de límite

22. Utiliza una tabla de valores para estimar el límite de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}|x-1|$

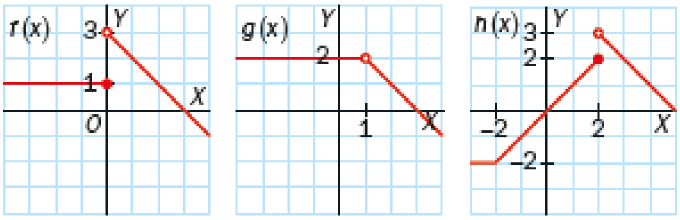
a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x)=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=0,5$

c) $\text{ó}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x}{x}$

d) $\text{lím}\limits_{x\to 1}|x-1|=0$

23. Usa estas gráficas para estimar los límites correspondientes:



a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -2} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$

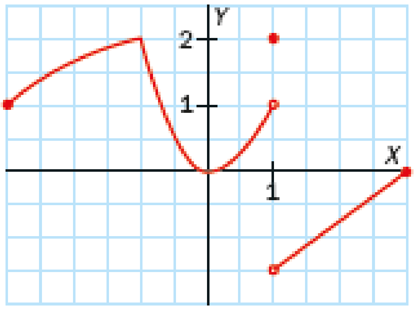
c) $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ no existe.

Límites laterales

24. Dada la gráfica de la función $f(x)$, calcula los valores que se proponen:

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ c) $f(-1)$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ f) $f(1)$



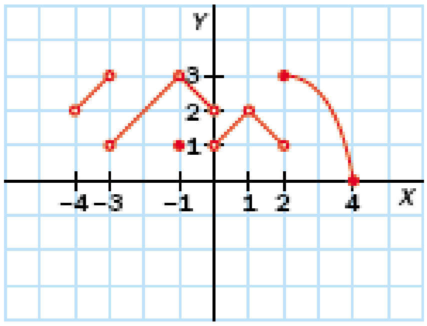
a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2$ b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2$ c) $f(-1)=2$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ e) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1{,}5$ f) $f(1)=2$

25. Dada la gráfica de la función $g(x)$, calcula los valores que se proponen:

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)$ c) $g(-3)$ d) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)$ e) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$ f) $g(-1)$

g) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ i) $g(0)$ j) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ k) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ l) $g(2)$



a) $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x)=3$ b) $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x)=1$ c) $g(-3)$ no existe

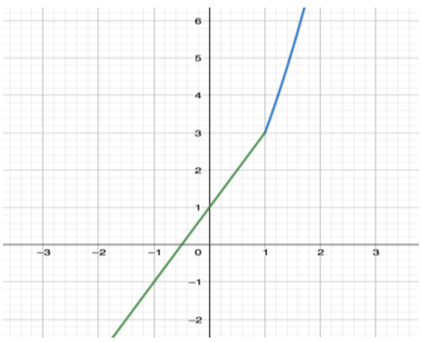
d) $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=3$ e) $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=3$ f) $g(-1)=3$

g) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=2$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$ i) $g(0)$ no existe

j) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=1$ k) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=3$ l) $g(2)=3$

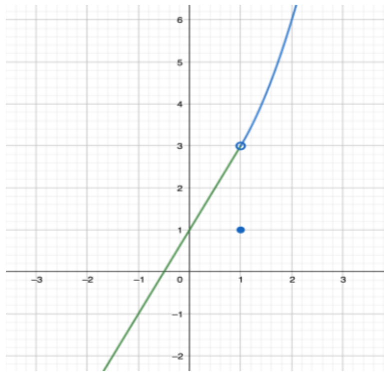
26. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ x^2+2x, & x\geq 1 \end{cases}$, represéntala gráficamente y estudia la existencia de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$



27. Representa gráficamente la función $f(x)$ y estudia la existencia de límites laterales en x=1.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 \ , \text{si } x<1 \\ 1 \, , \text{si } x=1 \\ x^2+2 \ , \text{si } x>1 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$

28. Halla los límites laterales en los puntos indicados.

a) $f(x)=\dfrac{5}{x^2} \quad , \quad x=0$ b) $f(x)=\dfrac{-3}{x+1} \ , \quad x=-1$

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

b) $\text{ó} \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Cálculo de límites

29. Calcula los siguientes límites:

a) $\mathbf{lím}_{x\to 2}\left(\mathbf{x}^3-5\mathbf{x}^2+4\right)$ **b)** $\mathbf{lím}_{x\to +\infty}\left(1-3\mathbf{x}+5\mathbf{x}^4\right)$ **c)** $\mathbf{lím}_{x\to -1}\sqrt[3]{\mathbf{x}^3-5\mathbf{x}^2+4}$

a) -8

b) $+\infty$

c) $\sqrt[3]{-2}$

30. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+1}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^4-16}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{3}{x-1}\right)$

a) $=-1$

b) $=\dfrac{1}{32}$

c) $=-\dfrac{1}{2}$

d) $\text{ó} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

e) $\displaystyle ó \lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-3}$

f) $\displaystyle ó \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x-1}\right)$

31. Calcula estos límites de funciones con radicales:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ c) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ d) $\displaystyle \lim_{x\to 9}\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$ e) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{11-x}-3}$

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\frac{1}{6}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 9}\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9}=\frac{1}{3}$

e) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{11-x}-3}=3$

32. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{x-1}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x}{x^2-9}$ c) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} e^{1/x}$ e) $\displaystyle \text{lím}_{x\to 2}\frac{x}{(2-x)^2}$ f) $\displaystyle \text{lím}_{x\to 2}\frac{x}{(2-x)^3}$

g) $\displaystyle \lim_{x\to 2}|x-2|$ h) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}\right)$

a) $\displaystyle ó\, \text{lím}_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{x-1}$

b) $\displaystyle ó \lim_{x\to 3}\frac{x}{x^2-9}$

c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$

d) ó $\lim_{x\to 0} e^{1/x}$

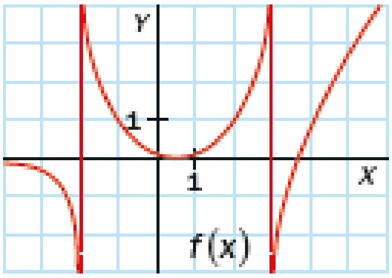
e) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{(2-x)^2} = +\infty$

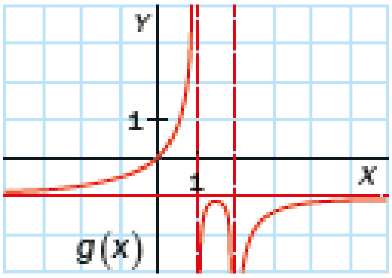
f) ó $\lim_{x\to 2} \frac{x}{(2-x)^3}$

g) $\lim_{x\to 2} |x-2| = 0$

h) ó $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right)$

33. Dadas las gráficas de las dos funciones siguientes, calcula los límites indicados:





a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

b) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, $\lim_{x\to 2^-} g(x)$, $\lim_{x\to 2^+} g(x)$, $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ y $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

a)

- $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b)

- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$,
- $\lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -1$
- $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -1$

34. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=e^x$, estudia:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$

a) $\acute{o}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+e^x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$

35. Calcula los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^2-5}{x^2+3}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3x}{6x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3x}{6x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^3+3}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5x^2-\dfrac{1}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2+4}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x+2}}$

a) $+\infty$
b) 6
c) $-\infty$
d) $+\infty$
e) 0
f) $+\infty$
g) 0
h) 0
i) $+\infty$

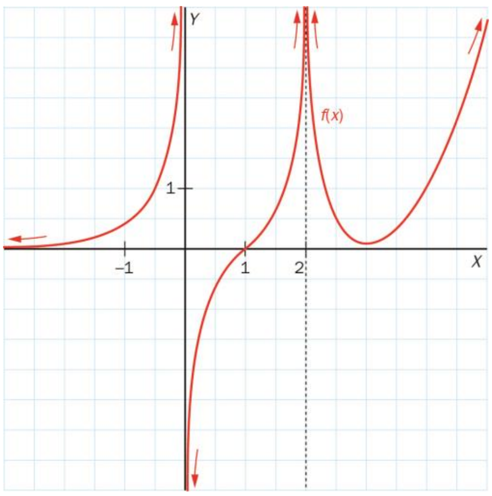
36. Esboza la gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

La gráfica de una función que cumple las condiciones del enunciado es:



37. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+e^x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{1+e^x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2}{1+e^x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\ln x\right)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-1)e^{-x}$

a) $+\infty$
b) 0
c) 2
d) $+\infty$
e) 0
f) $-\infty$

38. Estudia, según los valores de k, el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-k)x^3-kx^2+2}{3x^2+1}$$

- Si $1-k>0$, es decir, $k<1$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-k)x^3-kx^2+2}{3x^2+1}=+\infty$$

- Si $1-k<0$, es decir, $k>1$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-k)x^3-kx^2+2}{3x^2+1}=-\infty$$

- Si $1-k=0$, o lo que es equivalente, $k=1$, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-k)x^3-kx^2+2}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{3x^2+1}=\frac{1}{3}$$

40. El número de unidades de un producto que vende una empresa depende de su precio *p*, en euros, y viene dado por la siguiente ecuación. Si el precio aumenta indefinidamente, ¿qué ocurre con las ventas?

$$N(p)=\frac{40p+8}{p}$$

Las ventas tendrán a estabilizarse en 40 unidades.

Asíntotas

41. Halla, si existen, las asíntotas verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ b) $f(x)=\frac{2}{x^2+x-2}$ c) $f(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$

d) $f(x)=\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ e) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ f) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

a) $x=0$ es una asíntota vertical

b) $x=1$ y $x=-2$ son asíntotas verticales.

c) $x=1$ es una asíntota vertical.

d) Hay asíntotas verticales en $x=k\pi,\quad k\in Z$ y $k\neq 0$.

e) No tiene asíntotas verticales.

f) $x=1$ es una asíntota vertical.

42. Halla, si existen, las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x^2}{1-2x^2}$ b) $f(x)=e^x$ c) $f(x)=\ln x$ d) $f(x)=e^{-x}$

a) $y=-\dfrac{3}{2}$ es una asíntota horizontal

b) $y=0$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

c) No tiene asíntotas horizontales.

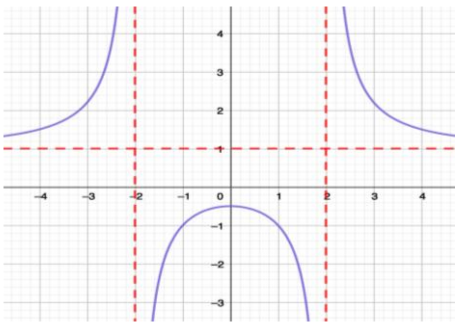
d) $y=0$ es una asíntota horizontal por la derecha.

43. Determina todas las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-5x+4}$

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ e) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$



- Asíntotas verticales

  $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales

  $y=1$ es una asíntota horizontal.

b) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3+x}$

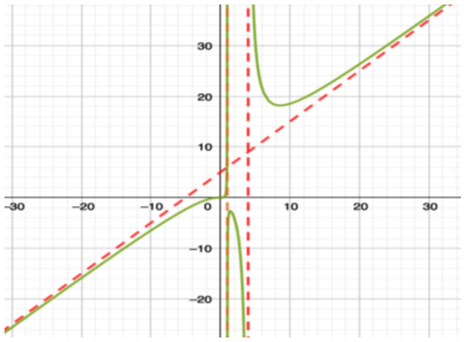
- Asíntotas verticales

  $x=0$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

  $y=1$ es una asíntota horizontal.

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-5x+4}$



- Asíntotas verticales

  $x=1$ y $x=4$ son asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales

  Esta función no tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas

  $y=x+5$ es una asíntota oblicua de la curva.

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

- Asíntotas verticales

  $x=-1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

  $y=0$ es una asíntota horizontal

e) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

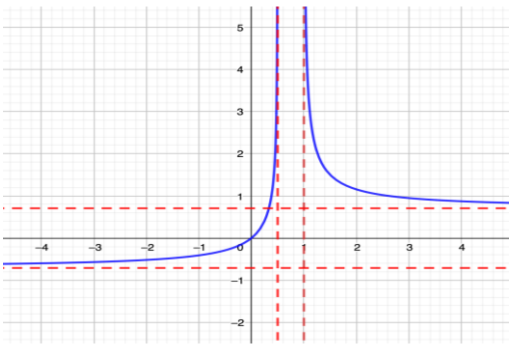
- Asíntotas verticales

  hay una asíntota vertical en $x=\dfrac{1}{2}$

  $x=1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

  $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ es una asíntota horizontal por la izquierda.



f) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{x(x-1)}$

- Asíntotas verticales

  $x=0$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales

  $y=0$ es una asíntota horizontal.

44. Encuentra una función racional que tenga por asíntotas verticales $x=-1$ y $x=3$, y por asíntota horizontal $y=2$.

Una función racional que tenga por asíntotas verticales $x=-1$ y $x=3$ y por asíntota horizontal $y=2$, puede ser:

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-2x-3}$$

45. Halla una función racional que tenga por asíntota vertical $x=-2$, y por asíntota oblicua $y=x-2$.

$$f(x)=x-2+\frac{1}{x+2}=\frac{x^2-3}{x+2}$$

46. Calcula todas las asíntotas y esboza la gráfica de las funciones:

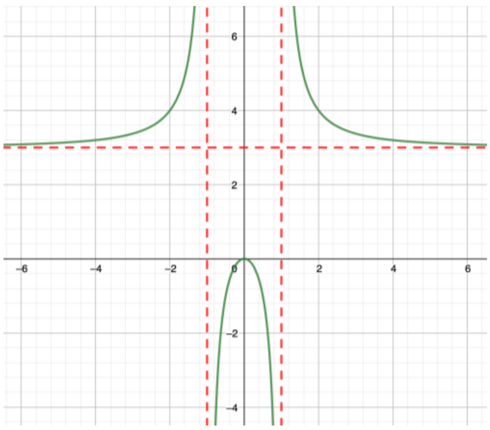
a) $f(x)=\frac{3x}{3x^2+1}$ b) $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-1}$ c) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-1}$

a)) $f(x)=\frac{3x}{3x^2+1}$

- No hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales.

$y=0$ es una asíntota horizontal.



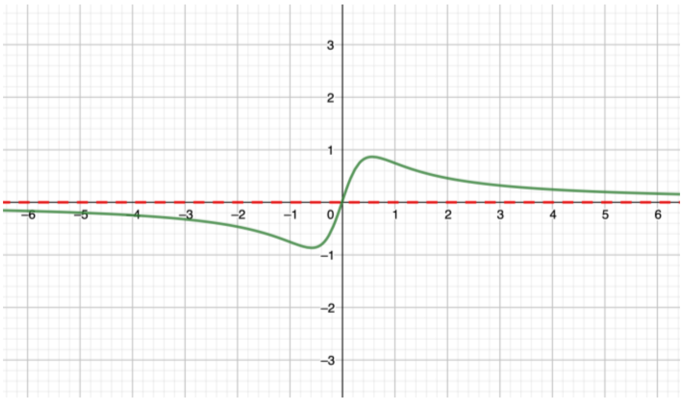
b) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-1}$

- Asíntotas verticales.

  $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales

- Asíntotas horizontales.

  $y=3$ es una asíntota horizontal.



c) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

- Asíntotas verticales.

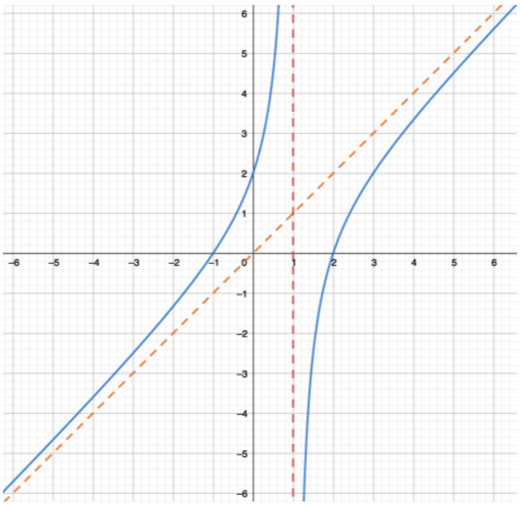
  $x=1$ es asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales.

  No hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas.

  $y=x$ es una asíntota oblicua.



47. Halla los valores de $a, b y c$ de la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-3}$, sabiendo que pasa por el punto (4,9) y que las rectas $y=2$ y $x=3$ son sus asíntotas horizontal y vertical, respectivamente.

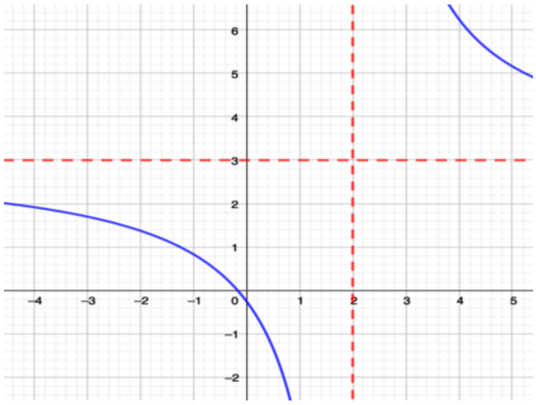
$c=1$, $a=2$ y $b=1$

48. Encuentra los valores de *a* y *b* de tal forma que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx-4}$ tenga asíntota vertical en *x* = 2 y asíntota horizontal en *y* = 3. A continuación, calcula $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, y esboza la gráfica de $f(x)$.

$$f(x)=\frac{6x+1}{2x-4}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{13}{0^-}=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{13}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x+1}{2x-4}=\frac{6}{2}=3$$



A continuación, utilizando esta información podemos esbozar la gráfica de la función.

49. ¿Cuántas asíntotas tiene la curva $f(x)=\dfrac{x^5+3x-1}{2x^4-1}$?

$f(x)$ tiene dos asíntotas verticales y una oblicua.

50. ¿Tiene asíntotas la función $f(x)=\sqrt{4x^2+8x+1}$? En caso afirmativo, encuéntralas.

$y=2x$ +2 es una asíntota oblicua por la derecha de $f(x)$.

$y=-2x$ - 2 es una asíntota oblicua por la izquierda de $f(x)$.

51. Halla, si existen, las asíntotas de las curvas: $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}$

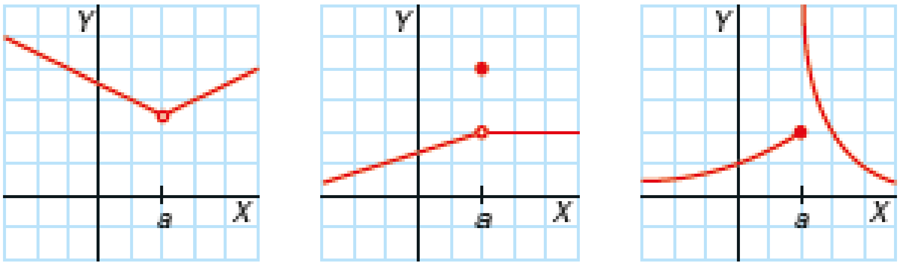
$y=1$ es una asíntota horizontal.

Continuidad

52. Estudia la continuidad en x = 2 de la función: $f(x)=\begin{cases} 1-x & ,\text{si } x\le 2 \\ x^2-2x & ,\text{si } x>2 \end{cases}$

La función $f(x)$ no es continua en x=2

53. En cada una de las siguientes gráficas indica, si es posible, cómo evitar la discontinuidad en x = a.



a) Basta definir $f(a)=2{,}5$ para evitar la discontinuidad en x=a.

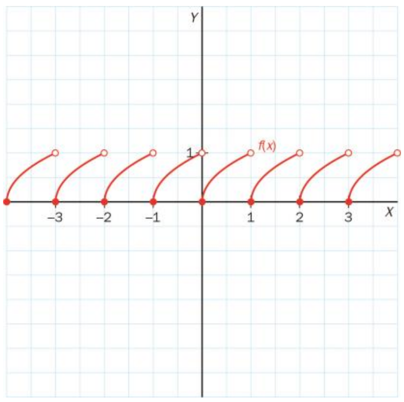
b) En este caso evitamos la discontinuidad en x=a definiendo $f(a)=2$.

c) En esta gráfica no es posible evitar la discontinuidad en x=a.

54. Representa gráficamente y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

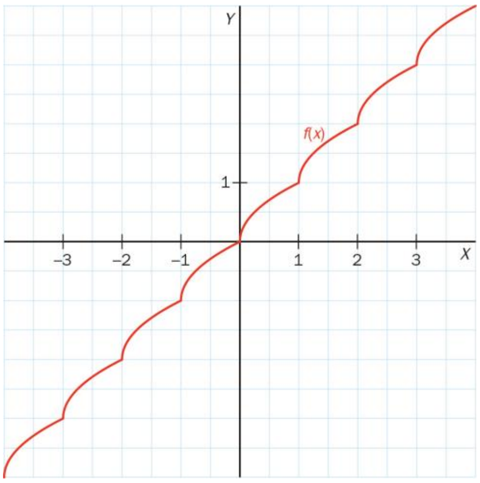
a) $f(x)=\sqrt{x-E[x]}$ b) $f(x)=E[x]+\sqrt{x-E[x]}$

a) $f(x)=\sqrt{x-E[x]}$



No es continua en los valores enteros.

b) $f(x)=E[x]+\sqrt{x-E[x]}$



Es continua en todo $\mathbb{R}$.

55. Halla el valor de a para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+a, & \text{si } x<1 \\ \ln x & \text{, si } x\geq 1 \end{cases}$$ sea continua en x= 1.

Para $a=-1$ la función $f(x)$ es continua en x=1.

56. Halla el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x=3$

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & , si\ x\leq 3 \\ ax^2-1 & , si\ x>3 \end{cases}$$

Si $a=\frac{1}{3}$, entonces la función $f(x)$ es continua en x=3 y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

57. Encuentra el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{, si } x<-1 \\ 3 & \text{, si } x\geq -1 \end{cases}$$

Para $a=4$ la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{, si } x<a \\ x-1 & \text{, si } x\geq a \end{cases}$$

Si $a=1$, entonces la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

58.Estudia la continuidad de la siguiente función y calcula, si existen sus asíntotas.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+6}{x-1} & ,\ \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & ,\ \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

No tiene asíntotas verticales.

$y=1$ es una asíntota horizontal por la derecha de la curva $f(x)$.

59.Dada la función: $f(x)=\begin{cases}a+\ln(1-x), & \text{si } x<0\\ x^2e^{-x} & ,\ \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Halla el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$$

b) Si $a=0$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

60. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. En los puntos que presenten discontinuidad evitable encuentra el valor de la función para que fuera continua.

a) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-4}$ b) $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

a) Presenta discontinuidades inevitables en $x=-2$ y $x=2$.

b) $g(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ es una función racional y no es continua en los puntos $x=-2$ y $x=2$.

c) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ es también una función racional y no es continua en x=1.

61. Estudia la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-15}{x-5}, & si\ x\neq 5\\ 2 & ,\ si\ x=5\end{cases}$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{5\}$

62. Encuentra los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que la función sea continua en todos los números reales.

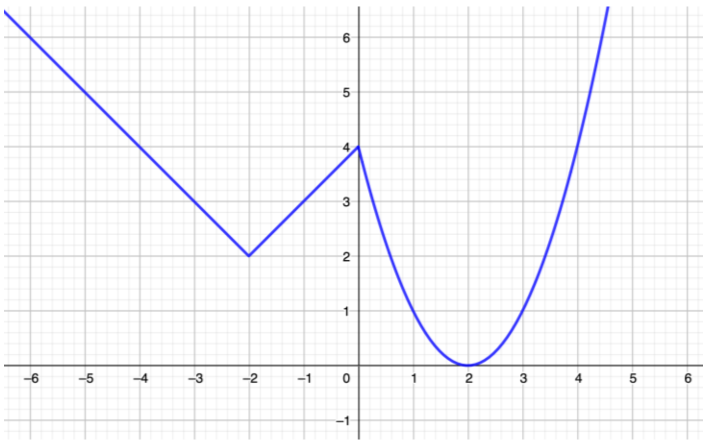
$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{, si } x\le -1 \\ ax+b & \text{, si } -1<x<2 \\ x^2 & \text{, si } x\ge 2 \end{cases}$$

Si $a=1$ y $b=2$ la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

63. ¿Para qué valor de *a* es continua en *x* = 0? Dibuja la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ para $\boldsymbol{a}=2$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} a+|\boldsymbol{x}+2|, & si\, x\le 0 \\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 & , si\ x>0 \end{cases}$$

Para $a=-1$ y $a=2$ la función $f(x)$ es continua en x=0.



64. Determina los valores de $\boldsymbol{a}>0$ y $\boldsymbol{b}>0$ para que la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ sea continua en todos los números reales.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} ax & , si\, x\le 3 \\ \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{x}^2} & , si\ x>3 \end{cases}$$

Si $b=27a$,entonces $f(x)$ es continua en $x=3$. Y, como las dos funciones son continuas en sus dominios, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

65. Encuentra el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}, & \text{si } x\ne a \\ 4 & \text{, si } x=a \end{cases}$$

Para $a=2$ la función $f(x)$ es continua en $x=2$ que es el único punto en el que está definida con otro criterio. En el resto, se trata de una función racional continua.

En consecuencia, para $a=2$ la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Aplicaciones

66. Estudio poblacional. Se estima que, el número de habitantes en cierta ciudad dentro de t años viene dado por la función

$$N(t)=\frac{100000}{4+6e^{-0,03t}}$$

a) ¿Cuál es la población inicial?
b) ¿Cuál es la población esperada dentro de 20 años? ¿Y dentro de 50 años?
c) A muy largo plazo, ¿qué población se espera que tenga?

a) Inicialmente había 10000 habitantes
b) La población esperada en esta población dentro de 20 años es de aproximadamente 13712 habitantes. Mientras que, dentro de 50 años, si se mantiene esta tendencia, será de 18731 habitantes.
c) A largo plazo esta ciudad tendrá aproximadamente 25000 habitantes, es decir, dos veces y media la población inicial.

67. Propagación de un virus. El número de miles de personas de una población contagiadas por un tipo de virus después t semanas, viene dado por:

$$N(t)=\frac{3}{1+5e^{-0,5t}}$$

a) ¿Cuántas personas estaban contagiadas por este virus inicialmente? ¿Y después de cuatro semanas?
b) Si la tendencia continúa, ¿cuántas personas acabarán contagiándose?

a) Inicialmente había en la población 750 personas contagiadas por este virus. Después de cuatro semanas había en la población aproximadamente 1789 personas contagiadas por este virus.

b) A “largo plazo” habrá aproximadamente 3000 personas contagiadas.

68. Crecimiento de un árbol. El diámetro d, en centímetros, de un tipo de árbol depende de la edad t, en años, y sigue el modelo de crecimiento logístico:

$$d(t)=\frac{20}{1+1,8e^{-0,02t}}$$

a) ¿Qué diámetro se espera que tenga este tipo de árbol al cabo de un año? ¿Y después de 40 años? ¿Y después de 100 años?
b) A lo largo del tiempo, ¿qué diámetro se espera que alcance?

a) Al cabo de un año el árbol tendrá un diámetro de aproximadamente 7,2 cm.
Al cabo de cuarenta años el árbol tendrá un diámetro de aproximadamente 11,1 cm.
Después de cien años el árbol tendrá un diámetro de aproximadamente 16,1 cm.

b) A lo largo del tiempo el árbol tenderá a tener un diámetro de aproximadamente 20 cm.

69. Seguidores de una Influencer. El número de miles de seguidores de una *influencer* depende del tiempo t, en meses, desde que comenzó a publicar sus comentarios e imágenes, y viene dado por la función:

$$N(t)=\begin{cases} 3t & , si\, 0\le t\le 6 \\ \dfrac{2}{2+3e^{-0{,}01t}} & , si\, t>6 \end{cases}$$

¿Cuántos seguidores espera tener a los cinco meses? ¿Y dentro de un año? ¿Y a largo plazo?

Esta *influencer* espera tener 15000 seguidores a los cinco meses desde sus inicios.

Dentro de un año espera tener 429 seguidores.

A largo plazo esta *influencer* tendrá aproximadamente 1000 seguidores.

70. Plataforma de Internet. En una plataforma de Internet se oferta un teléfono móvil cuyo precio, p, en euros, depende del número de unidades, x, en stock, y se puede modelar mediante la siguiente función de demanda.

$$p(x)=300\left(1+\frac{2}{2+e^{-0{,}01x}}\right) \quad , \; x>0$$

a) Halla los precios si dispone de un stock de 100, 200 y 1000 móviles.
b) Si el stock es muy elevado, el precio del móvil tiende a estabilizarse alrededor de un precio, ¿cuál es este? ¿Qué interpretación puedes dar?

a) Si $x=100$, entonces $\approx 553€$
Si $x=200$, entonces $\approx 581€$
Si $x=1000$, entonces $\approx 600\ €$

b) Cuando el stock de móviles es muy elevado el precio tiende a estabilizarse alrededor de 600 €.

71. Coste de reciclado. El coste (en miles de euros) de reciclar el porcentaje x de residuos de una población viene dada por:

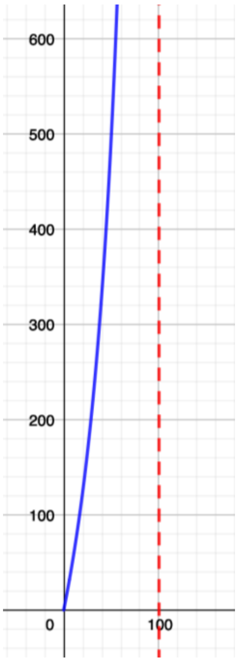
$$C(x)=\frac{500x}{100-x} \quad , \; 0\le x<100$$

a) ¿Cuál es el coste de reciclar el 50 % de los residuos? ¿Y el 80 %?
b) A medida que nos acercamos al 100 % del reciclaje de los residuos, ¿qué le ocurre al coste? ¿Qué interpretación se puede dar?
c) Esboza la gráfica de la función de costes.

a) El coste de reciclar el 50 % de los residuos de esa población es de 500000 euros.
El coste de reciclar el 80 % de los residuos de esa población es de 2 millones de euros.

b) A medida que nos acercamos al 100 % del reciclaje de los residuos los costes crecen de forma ilimitada y, por tanto, no habría presupuesto para lograrlo.
Por otra parte, la interpretación que podemos dar es que la función de costes tiene una asíntota vertical en $x=100$.

$c)$ Un esbozo de la gráfica de la función de costes es:



72. Logística. El coste, en euros, de mantener un stock de x unidades de la *playstation PS5 pro*viene dado por la función:

$$C(x)=3x+\frac{5000}{x} \quad , \quad x>0$$

a) Halla todas las asíntotas de la función de costes.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} C(x)$.

c) ¿Qué relación existe entre la recta $y=3x$ y la función $C(x)$?

d) Utiliza la información de los apartados anteriores para esbozar la gráfica de la función de costes.

a) La recta $x=0$ es una asíntota vertical de la función de costes.

b) $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{C(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{5000}{x^2}\right)=3+0=3$

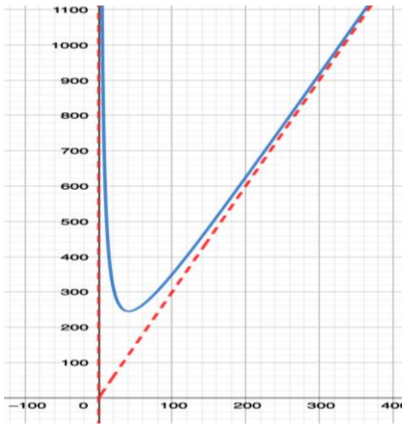
$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[C(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x+\frac{5000}{x}-3x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5000}{x}=0$

c) La recta $y=3x$ es una asíntota oblicua de la función de costes $C(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} C(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3x + \frac{5000}{x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

En el apartado a) deducimos que la recta $y = 3x$ es una asíntota oblicua de la función de costes $C(x)$.

d) Con la información de los apartados anteriores podemos esbozar la gráfica de la función de costes $C(x)$.



73. Estudio de la mente humana. Los psicólogos estiman que el número de acontecimientos personales que se recuerdan después t años se puede modelar por la función:

$$Q(t) = 400\left(1 - e^{-0,1t}\right)$$

a) ¿Cuántos acontecimientos personales se espera que recordemos después de tres años? ¿Y después de diez años?

b) A largo plazo, ¿cuántos acontecimientos personales recordará una persona?

a) Después de tres años se espera que recordemos aproximadamente 104 acontecimientos personales. Después de diez años se espera que recordemos aproximadamente 253 acontecimientos personales

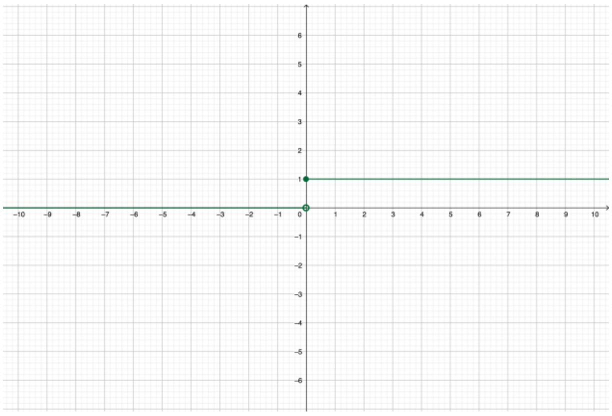
b) A largo plazo, se espera que una persona recuerde aproximadamente 400 acontecimientos personales.

Un mundo matemático

1. Representa gráficamente las tres funciones y estudia su continuidad. ¿Hacen honor a su nombre?

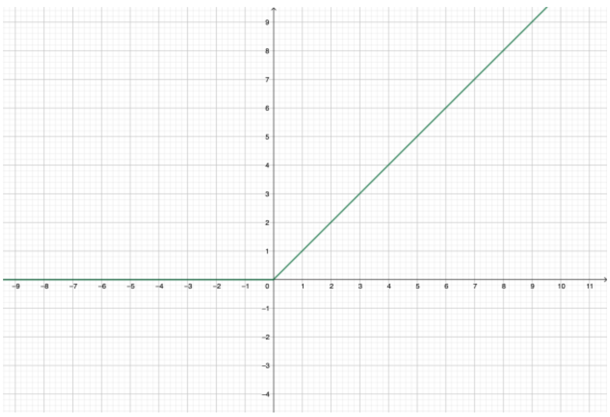
- Función escalón de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , si\ x < 0 \\ 1 & , si\ x \geq 0 \end{cases}$$



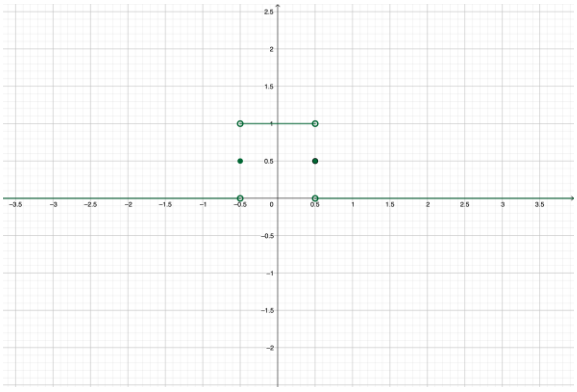
- Función rampa

$$r(x) = \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} \dfrac{x - x}{2} = 0\,, si\ x < 0 \\ \dfrac{x + x}{2} = \dfrac{2x}{2} = x\,, si\ x \geq 0 \end{cases}$$



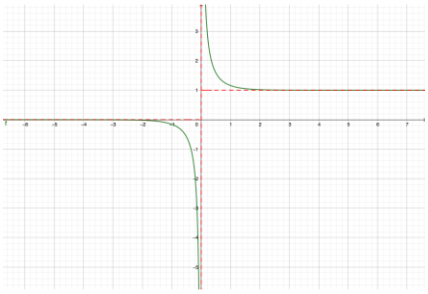
- Función rectángulo o pulso unitario

$$\pi(t)=\begin{cases}0, & si\ |t|>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & si\ |t|=\frac{1}{2}\\ 1\,, & si\ \ |t|<\frac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}0\ , & si\ t<-\frac{1}{2}\ \text{o}\ t>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\qquad , & si\ t=\pm\frac{1}{2}\\ 1\,, & si\ -\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}\end{cases}$$

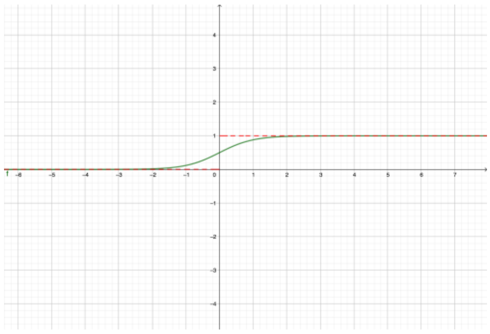


2. Sean $f(x)=\frac{1}{1-e^{-2x}}$ y $g(x)=\frac{1}{1+e^{-2x}}$. Utiliza una herramienta gráfica para dibujarlas. A continuación, calcula los límites de ambas funciones cuando $x \to -\infty$, $x \to 0$ y $x \to +\infty$. ¿Cuáles son sus asíntotas? ¿En alguna de ellas coinciden los límites anteriores con los de la función Heaviside?

Sean $f(x)=\frac{1}{1-e^{-2x}}$ y $g(x)=\frac{1}{1+e^{-2x}}$. Sus gráficas son las siguientes:



$f(x)=\frac{1}{1-e^{-2x}}$



$g(x)=\frac{1}{1+e^{-2x}}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1-e^{-2x}}=\frac{1}{1-e^{+\infty}}=\frac{1}{-\infty}=0$

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{1-e^{0}} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{1-e^{-\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1$

- $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{1+e^{0}} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$

De los límites hallados deducimos que la función $f(x) = \frac{1}{1-e^{-2x}}$ tiene, a y=0 como asíntota horizontal por la izquierda, y a y=1 como asíntota horizontal por la derecha. Además, x=0 es una asíntota vertical.

Por su parte, también deducimos que la función $g(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$ tiene, a y=0 como asíntota horizontal por la izquierda, y a y=1 como asíntota horizontal por la derecha. Pero no tiene asíntotas verticales.

Por otro lado, comprobamos que, cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$, los límites de ambas funciones coinciden con los de la función Heaviside.