7. Derivadas

2 Derivada de una función

1. Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados.

   a) $f(x)=3-x^2$, $P(-1,2)$ b) $f(x)=2x+5$, $P(1,7)$

   a) La pendiente a la curva en dicho punto es 2.
   b) La pendiente a la curva en dicho punto es: 2

2. Determina la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos indicados:

   a) $f(x)=3x^2+4x$, $P(1,7)$ b) $f(x)=x^3+1$, $P(0,1)$.

   a) La ecuación de la recta tangente a la curva es: $y-7=10(x-1)\Rightarrow 10x-y-3=0$

   b) La pendiente de la curva es: $y-1=0(x-0)\Rightarrow y-1=0$

3 Tasas de variación

3. Ingresos de una empresa. Los ingresos, en millones de euros, de una empresa después de t años de funcionamiento se estiman por:

$$I(t)=0,2t^2+5t$$

   a) Calcula la tasa de variación media de los ingresos entre los años primero y segundo de funcionamiento.
   b) ¿A qué ritmo de crecimiento se estiman los ingresos al inicio del segundo año de funcionamiento?

   a) La tasa de variación media entre los dos primeros años de funcionamiento es de 5,6 millones de euros.

   b) El ritmo de crecimiento al inicio del segundo año es de 5,8 millones de euros.

4. Evolución de una población. Observa los datos de la tabla siguiente, en la que figura la evolución de la población española en millones de habitantes. Halla la tasa de variación media del crecimiento de:

   a) 1930 a 1991 b) De 1991 a 2018 c) De 1930 a 2018

Año	1930	1960	1991	2012	2018
Población	23,7	30,6	39,4	46,8	46,7

   a) La tasa de variación media entre los años 1930 y 1991 fue de 257377 habitantes.

b) La tasa de variación media entre los años 1991 y 2018 fue de 270370 habitantes.

c) La tasa de variación media entre los años 1930 y 2018 ha sido de 261364 habitantes.

4 Técnicas de derivación

5. Calcula la derivada en los puntos indicados.

a) $f(x) = x + 3\sqrt{x}$, x=2 b) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^3}$, x=-1

a) $f(x) = x + 3\sqrt{x} = x + 3 \cdot x^{1/2}$ $f'(x) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ $f'(2) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}$

b) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^3}$ $f'(x) = 2 - \frac{0 \cdot x^3 - 1 \cdot 3x^2}{x^6} = 2 + \frac{3x^2}{x^6} = 2 + \frac{3}{x^4}$ $f'(-1) = 2 + \frac{3}{1} = 5$

6. Encuentra la ecuación de la recta normal a la curva $y = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 1)$ en el punto de abscisa x=2.

La ecuación de la recta normal a la curva es: $y + 3 = -\frac{1}{-3}(x-2) \Rightarrow x - 3y - 11 = 0$

7. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 12$ en los puntos de intersección con los ejes.

En el punto $P_1(0,-12)$ la ecuación de la recta tangente es: $y + 12 = -2(x-0) \Rightarrow \quad 2x + y + 12 = 0$

En el punto $P_2(-4,0)$ la ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -4(x+4) \Rightarrow \quad 4x + y + 16 = 0$

En el punto $P_1(12,0)$ la ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 4(x-12) \Rightarrow \quad 4x - y - 48 = 0$

8. Costes y beneficios. Un fabricante artesanal estima que el coste total (en euros) de fabricar x pares de zapatillas deportivas es:

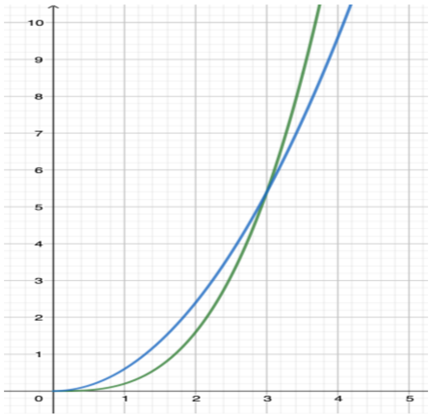
$$C(x) = 0,2x^3$$

a) ¿Cuál es el coste total de fabricar diez pares de zapatillas?
b) Si el coste marginal es la derivada del coste total y representa el coste de fabricar un par de zapatillas adicional. ¿Cuál será el coste marginal de fabricar dos pares de zapatillas?
c) Representa gráficamente las funciones C(x) y C´(x) y analiza su comportamiento.

a) El coste total de fabricar diez pares de zapatillas es: 200 €

b) El coste adicional de fabricar dos pares de zapatillas es de 2,40 euros.

c) A continuación, dibujamos las gráficas de las funciones coste total, C(x) (en verde) y coste marginal, C´(x) (en azul).



A partir de la fabricación de tres pares de zapatillas el coste total supera al coste marginal.

9. Halla las derivadas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x-1}$ e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ f) $f(x)=\dfrac{2-x}{3-2x}$

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ $\quad f´(x)=\dfrac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ $\quad f´(x)=\dfrac{1\cdot(x-3)-(x+2)\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{-5}{(x-3)^2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$ $\quad f´(x)=\dfrac{3x^2\cdot(x^2+2)-x^3\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{x^4+6x^2}{(x^2+2)^2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x-1}$ $\quad f´(x)=\dfrac{2\cdot(3x-1)-(2x-3)\cdot 3}{(3x-1)^2}=\dfrac{7}{(3x-1)^2}$

e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ $\quad f´(x)=\dfrac{1\cdot(x^2-x+1)-(x+1)\cdot(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{x^2-x+1-(2x^2-x+2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x+2}{(x^2-x+1)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{2-x}{3-2x}$ $\quad f´(x)=\dfrac{(-1)\cdot(3-2x)-(2-x)\cdot(-2)}{(3-2x)^2}=\dfrac{1}{(3-2x)^2}$

10. Calcula la derivada de $g(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x}$

a) Realizando previamente la división.
b) Utilizando la derivada del cociente.

a) Realizamos la división.

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+6 & x \\ \cline{2-2} -x^2 & x-3 \\ \hline \quad -3x+6 & \\ \quad +3x & \\ \hline \qquad\quad 6 & \end{array}$$

b) $g(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x}=(x-3)+\dfrac{6}{x}$ Por tanto, $g'(x)=1-\dfrac{6}{x^2}$

$$g(x)=\frac{x^2-3x+6}{x} \qquad g'(x)=\frac{(2x-3)\cdot x-(x^2-3x+6)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-3x-x^2+3x-6}{x^2}=\frac{x^2-6}{x^2}$$

Obviamente ambos resultados son iguales.

11. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ que pasan por el punto (-1,5).

La ecuación de la recta tangente en $P_1(2,2)$ es: $y-2=-1(x-2)\Rightarrow x+y-4=0$

La ecuación de la recta tangente en $P_2\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ es: $y+1=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow 4x+y-1=0$

12. Halla los coeficientes a, b y c de la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ sabiendo que pasa por el punto $P(2,5)$, y que $f'(2)=3$ y $f''(2)=2$.

Los coeficientes son $a=1$, $b=-1$ y $c=3$.

13. Determina si la función $y=2x^3$ verifica la $y''-y=0$.

En general no verifica esta ecuación, si bien lo hace para algunos valores concretos como 0, $-\sqrt{6}$ y $\sqrt{6}$

5 Regla de la cadena o derivación compuesta

14. Aplica la regla de la cadena para derivar las funciones:

a) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)^3$ b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2x+5}}$ c) $f(x)=\dfrac{2x}{(3x-1)^2}$

a) $f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x^2-1}\right)^3$

$$f'(x)=3\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)^2\cdot\frac{1\cdot(x^2-1)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{(x+2)^2\cdot(-3x^2-12-3)}{(x^2-1)^4}$$

b) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2x+5}}=\left(\frac{x}{2x+5}\right)^{1/2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2x+5}\right)^{-1/2}\cdot\frac{1\cdot(2x+5)-x\cdot 2}{(2x+5)^2}=\frac{5}{2(2x+5)^2}\sqrt{\frac{2x+5}{x}}$$

c) $f(x)=\frac{2x}{(3x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2x}{(3x-1)^2}=\frac{2\cdot(3x-1)^2-2x\cdot 2\cdot(3x-1)\cdot 3}{(3x-1)^4}=\frac{(3x-1)(6x-2-12x)}{(3x-1)^4}=\frac{-6x-2}{(3x-1)^3}$$

15. Calcula las derivadas primera y segunda de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x)=(x^3-3x)^5}$ b) $\boldsymbol{f(x)=\frac{3}{x^2}}$ c) $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{(1-x)}}$

a) $f(x)=(x^3-3x)^5$

$f'(x)=5\cdot(x^3-3x)^4\cdot(3x^2-3)$

$f''(x)$ $=(x^3-3x)^3\left[3x^5+210x^4-12x^3+270x^2+9x+180\right]$

b) $f(x)=\frac{3}{x^2}=3x^{-2}$

$f'(x)=-6x^{-3}$ $f''(x)=18x^{-4}$

c) $f(x)=\sqrt{(1-x)}=(1-x)^{1/2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{1/2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$

$f''(x)=\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}\cdot(-1)=-\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}$

6 Derivada de las funciones exponencial y logarítmica

16. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x\cdot\mathbf{e}^{x-1}$ en el punto de abscisa $\boldsymbol{x}=1$.

La ecuación de la recta tangente es: $y-1=2(x-1)\Rightarrow 2x-y-1=0$

17. Calcula las siguientes derivadas:

a) $\boldsymbol{y=\mathrm{x}^2\ln(1-x)}$ b) $\boldsymbol{y=e^{\sqrt{x}}}$ c) $y=\frac{1}{2-e^x}$ d) $\boldsymbol{y=3xe^{-2x}}$

a) $y=\mathrm{x}^2\ln(1-x)$ $y'=2\mathrm{x}\ln(1-x)-\frac{x^2}{1-x}$

b) $y=e^{\sqrt{x}}=e^{(x)^{1/2}}$ $y'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

c) $y=\frac{1}{2-\mathrm{e}^{-x}}$ $y'=\frac{0\cdot(2-\mathrm{e}^{-x})-1\cdot(-\mathrm{e}^{-x})\cdot(-1)}{(2-\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{(2-\mathrm{e}^{-x})^2}$

d) $y=3x\mathrm{e}^{-2x}$ $y'=3\mathrm{e}^{-2x}+3x\cdot\mathrm{e}^{-2x}\cdot(-2)=3\mathrm{e}^{-2x}(1-2x)$

18. Propagación de un rumor. Según fuentes periodísticas, un rumor se propaga siguiendo la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})=\dfrac{1}{1+\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}^{-kt}}$, donde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ es la proporción de personas de una población que lo conocen al cabo de $\boldsymbol{t}$ días, y $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{k}$ son constantes positivas.

a) Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ e interpreta el resultado.

b) Determina la velocidad de propagación del rumor.

c) Para a=10 y k=0,5. ¿Cuál es el ritmo de propagación del rumor al cabo de 12 días?

a) A "largo plazo" el rumor lo conocerá toda la población, es decir, el 100 %.

b) La velocidad de propagación del rumor es la derivada $f'(t) \Rightarrow f'(t)=\dfrac{ake^{-kt}}{\left(1+ae^{-kt}\right)^2}$

c) El ritmo de propagación del rumor al cabo de 12 días es del 1,18 %.

7 Funciones crecientes y decrecientes

19. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^3-3\boldsymbol{x}^2+2$ b) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}^4-4\boldsymbol{x}^2+3$ c) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\mathrm{e}^{-x}$

d) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{x}^2-4}$ e) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$

a) $f(x)=x^3-3x^2+2$

$f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(2,+\infty)$, y decreciente en $(0,2)$.

b) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}^4-4\boldsymbol{x}^2+3$

$f(x)$ es creciente en los intervalos $(-1,0)$ y $(1,+\infty)$, y decreciente en $(-\infty,-1)$ y $(0,1)$

c) $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,1)$ y decreciente en $(1,+\infty)$.

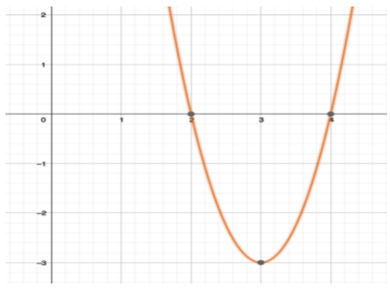
d) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

$f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(-2,0)$ y decreciente en $(0,2)y(2,+\infty)$.

e) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$f(x)$ es creciente en todo R. Un esbozo de su gráfica es:

20. Se conoce la gráfica de la derivada *f´(x)* de una función *f(x)*. ¿En qué intervalos es creciente o decreciente *f(x)?*



$f(x)$ es creciente en $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ y decreciente en $(2,4)$.

8 Extremos relativos

21. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-12$ b) $f(x)=2x^3+6x^2+6x+5$ c) $f(x)=\frac{x}{x-2}$ d) $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$

e) $f(x)=xlnx$ *f*) $f(x)=x^2e^x$

a) $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-12$

La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$. Además, tiene un mínimo relativo en $x=0$ y en $x=3$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

b) $f(x)=2x^3+6x^2+6x+5$

La función $f(x)$ es creciente en todo R y en $x=-1$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

c) $f(x)=\frac{x}{x-2}$

La función $f(x)$ es decreciente en $\mathrm{R}-\{2\}$.

d) $f(x)=\frac{x}{x^2+3}$

La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}+\infty$ y creciente en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ Además, tiene un mínimo relativo en $x=-\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x=\sqrt{3}$.

e) La función $f(x)$ es decreciente en $\left(0,\frac{1}{e}\right)$, creciente en $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ y tiene un mínimo relativo en el punto P$\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$.

f) La función $f(x)$ es decreciente en $(-2,0)$, creciente en$(-\infty,-2)$ y $(2,+\infty)$. Tiene un mínimo relativo en el punto P$(0,0)$ y un máximo relativo en el punto $(-2,\ 4e^{-2})$.

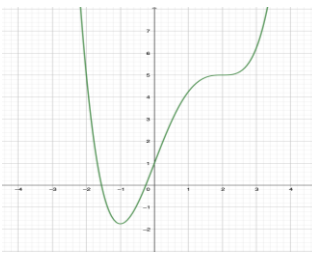
22. Encuentra los coeficientes de la parábola $y=ax^2+bx+c$, sabiendo que su gráfica tiene un mínimo relativo en (2,12) y que pasa por el punto (0,2).

Los coeficientes son:

$$a=-\frac{5}{2},\ b=10,\ c=2$$

23. Esboza la gráfica de una función que cumple:

$f'(-1)=f'(2)=0$ $f'(x)<0$, si $x\in(-\infty,-1)$ $f'(x)>0$, si $x\in(-1,2)\cup(2,+\infty)\sqrt{2}$



24. Encuentra los máximos y mínimos absolutos para las siguientes funciones e intervalos:

a) $f(x)=x^2+4x-5,\ [-1,4]$ b) $f(x)=-x^2+2x,\ [0,1]$

a) El punto $(-1,8)$ es mínimo absoluto y el $(4,27)$ máximo absoluto.

b) El punto $(0,0)$ es mínimo absoluto y el punto $(1,1)$ máximo absoluto.

25. Rentabilidad de inversiones. Una consultoría estima que la rentabilidad de una inversión depende de la cantidad invertida, en miles de euros, y que viene dada por $R(x)=-0{,}01x^2+0{,}1x+1, x>0.$ Determina la cantidad que se debe invertir para maximizar la rentabilidad.

Debería invertir 5000 euros para obtener una rentabilidad máxima de 1250 euros.

26. Utiliza la derivada segunda para determinar los extremos relativos de la curva $y=2x^3+3x^2-12x+15$

$\textit{máximo relativo en el punto } P(1,8).$

$\textit{mínimo relativo en el punto } Q(-2,35).$

9 Concavidad y puntos de inflexión

27. Determina los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las curvas:

a) $f(x)=x^3-12x+4$ b) $f(x)=x^2e^x$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

a) $f(x)=x^3-12x+4$

La función es convexa en $(-\infty,0)$ y cóncava en $(0,+\infty)$. Por tanto, en $x=0$ cambia de curvatura y el punto $(0,4)$ es de inflexión.

b) $f(x)=x^2\cdot e^x$

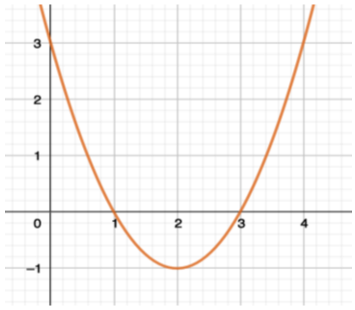
La función es convexa en $\left(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right)$ y cóncava en $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right)\cup\left(-2+\sqrt{2},+\infty\right)$.

Luego, tanto en $x=-2-\sqrt{2}$ como en $x=-2+\sqrt{2}$ cambia de curvatura y, por tanto, son puntos de inflexión.

c) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

La función es convexa en $(-2,0)$ y cóncava en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. Como en $x=0$ cambia de curvatura, entonces el punto (0,0) es un punto de inflexión.

28. Esta es la gráfica de la derivada segunda de una función. Encuentra los intervalos de concavidad y convexidad, así como sus puntos de inflexión.

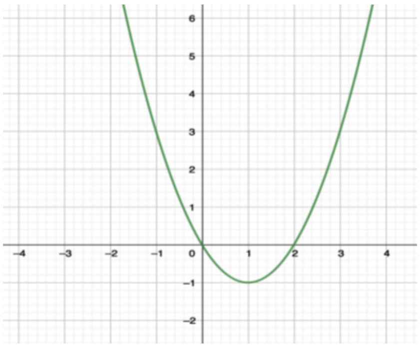


La función $f(x)$ es convexa (abierta hacia abajo) en $(1,3)$ y cóncava (abierta hacia arriba) en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. Además, como es continua tiene dos puntos de inflexión en $x=1$ y $x=3$.

29. Dibuja la gráfica de una función que tenga las siguientes características:

$\boldsymbol{f(0)=f(2)=0}$ $\quad$ $\boldsymbol{f'(x)<0}$ **si** $\boldsymbol{x<1}$ $\quad$ $\boldsymbol{f'(1)=0}$

$\boldsymbol{f'(x)>0,}$ **si** $\boldsymbol{x>1}$ $\quad$ $\boldsymbol{f''(x)>0}$



30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de la función $\boldsymbol{f(x)=3x^4+x^3-1}$

La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$. Además, tiene un mínimo relativo en $x=-\frac{1}{4}$, mientras que en $x=0$ no hay ni máximo ni mínimo relativo. La función es convexa en $\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right)\cup(0,+\infty)$. y cóncava en $\left(-\frac{1}{6},0\right)$, Como en $x=-\frac{1}{6}$ y $x=0$ cambia de curvatura la función, entonces ambos son puntos de inflexión.

31. Dada la función $\boldsymbol{f(x)=x^4+ax^3+x^2}$, estudia cuando tiene ninguno, uno o dos puntos de inflexión, según los valores de $\boldsymbol{a}$.

- Si $9a^2-24=0 \Rightarrow a=\pm\frac{8}{3}$. Hay un único punto de inflexión .
- Si $9a^2-24>0$, si $a<-\frac{8}{3}$ o $a>\frac{8}{3}$. Habrá dos puntos de inflexión .
- Si $9a^2-24<0$, si $-\frac{8}{3}<a<\frac{8}{3}$. No hay níngún punto de inflexión.

32. Determina los valores de a, b, c y d en la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que tiene un mínimo relativo en (2,4), máximo relativo en (4,2) y punto de inflexión en (3,3).

Si tiene un mínimo relativo en (2,4) entonces verifica que $y(2)=4$ y $y'(2)=0$.

Si tiene un máximo relativo en (4,2) entonces debe cumplir que $y(4)=2$ y $y'(4)=0$.

Por otro lado, si el punto (3,3) es de inflexión, entonces $y(3)=3$ y $y''(3)=0$.

33. La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

a) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento?
b) ¿En qué puntos hay extremos relativos?
c) ¿Cuáles son los intervalos de concavidad y convexidad?
d) ¿Hay puntos de inflexión?
e) Esboza su gráfica.

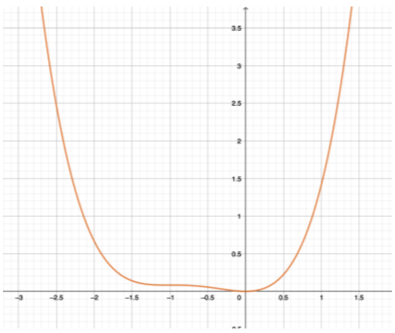
a) La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (-1,0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

b) $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

$c)$ La función es convexa en $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$.

$d)$ Tanto en $x = -1$ como y $x = -\frac{1}{3}$ cambia de curvatura la función $f(x)$y, por tanto, son puntos de inflexión.

$e)$



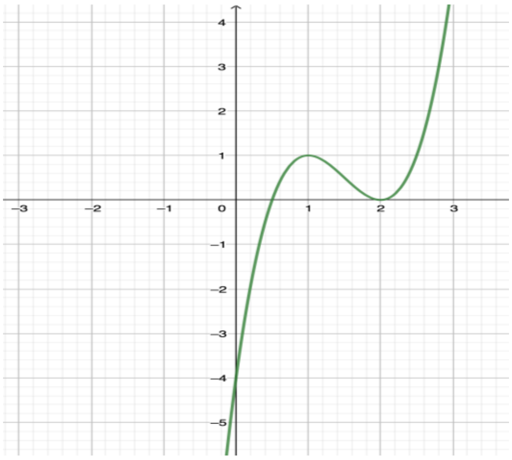
10 Representación gráfica de funciones

34. Calcula los elementos característicos y representa gráficamente las siguientes funciones:

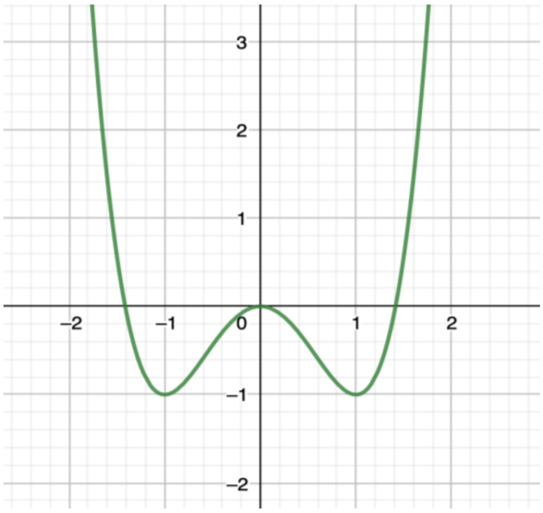
a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ b) $y = x^4 - 2x^2$ c) $y = 1 - \frac{1}{x}$

d) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ e) $y = x^2 + \frac{2}{x}$ f) $y = \frac{9x}{x^2 + 2}$

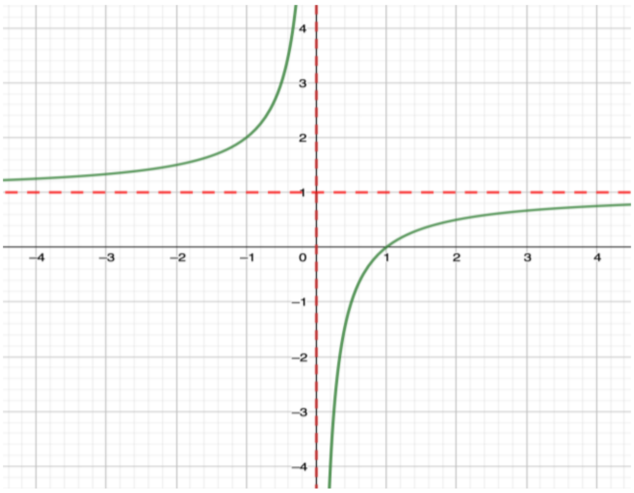
a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$



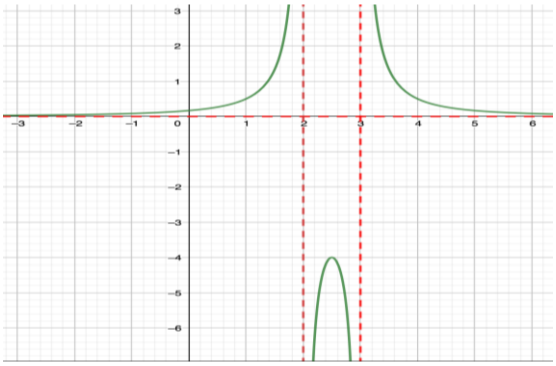
b) $\boldsymbol{y = x^4 - 2x^2}$



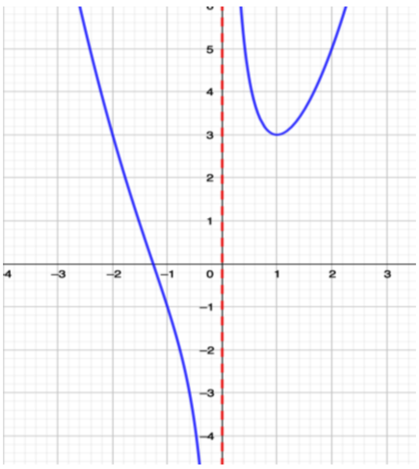
c) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$



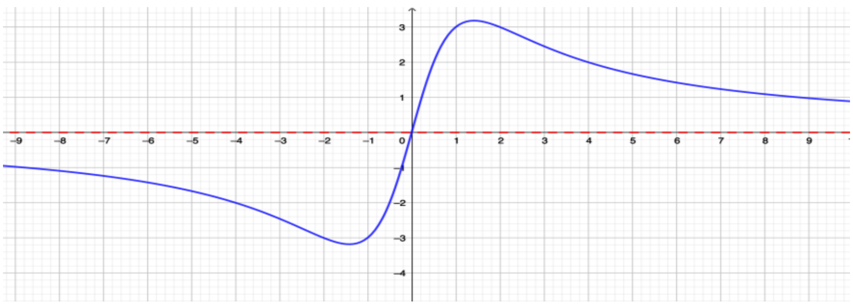
d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$



e) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$



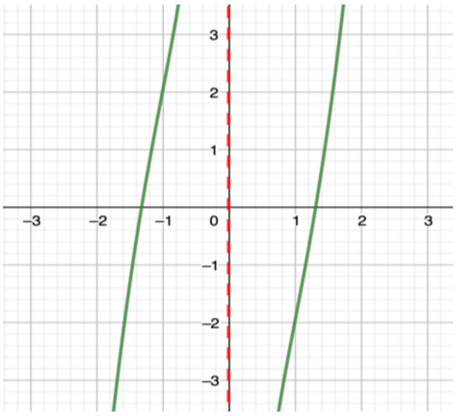
f) $y = \dfrac{9x}{x^2 + 2}$



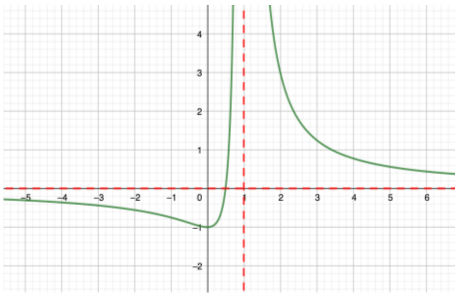
35. Calcula el dominio, los puntos de corte, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y efectúa un dibujo aproximado de las funciones:

a) $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$ b) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ c) $y = x^3 e^{-x}$

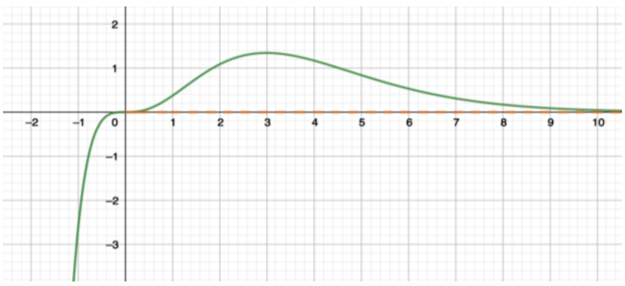
a) $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$



b) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$



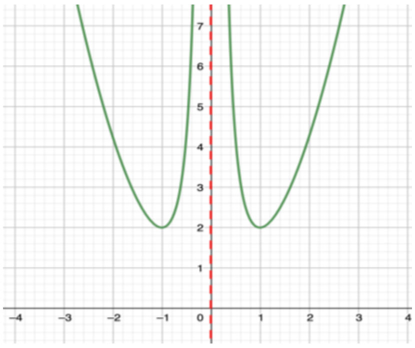
c) $y = x^3 e^{-x}$



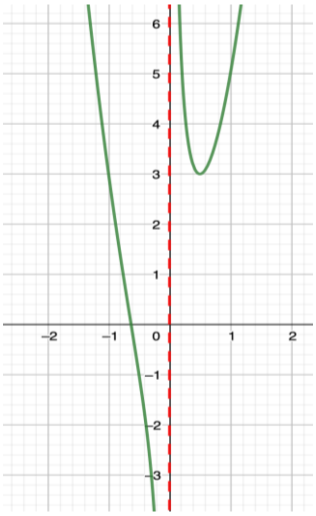
36. Calcula el dominio, los puntos de corte, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y efectúa un dibujo aproximado de las funciones:

a) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ **b)** $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$ **c)** $y = \frac{1}{e^x - 1}$

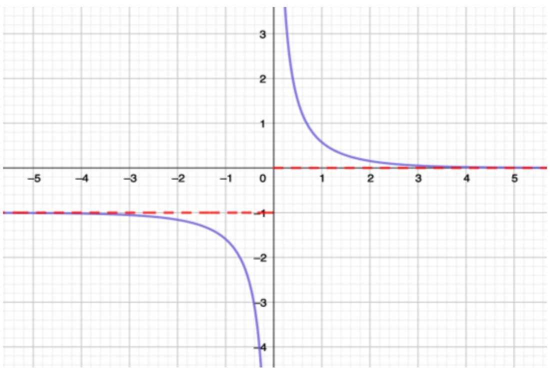
a) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$



b) $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$



c) $y = \frac{1}{e^x - 1}$

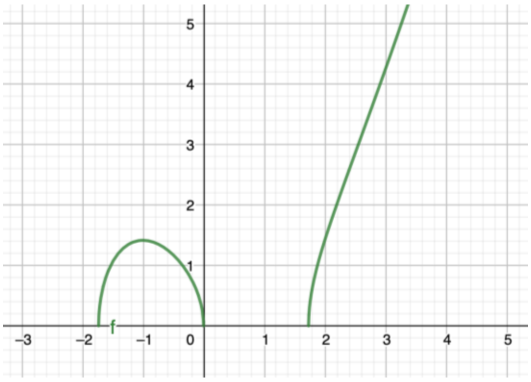


37. Calcula los elementos necesarios para dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

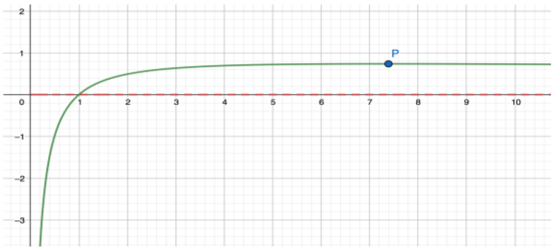
a) $y=\sqrt{x^3-3x}$ b) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ c) $y=\cos x-\cos^2 x$

d) $y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$ e) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$ f) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$

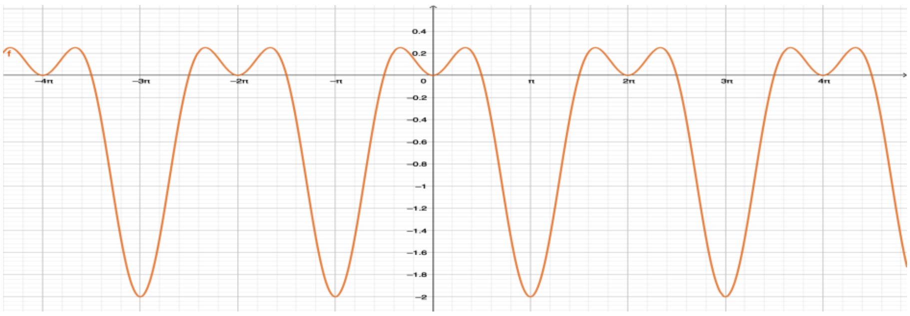
a) $y=\sqrt{x^3-3x}$



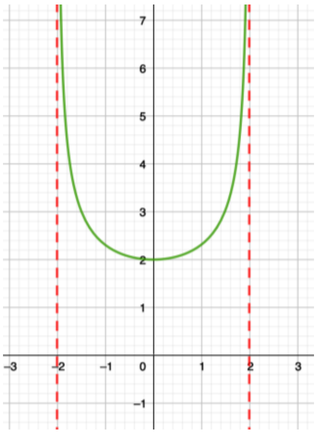
b) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$



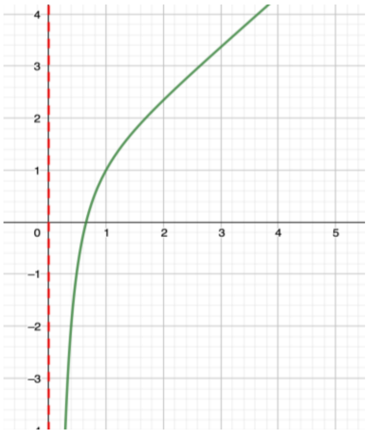
c) $y=\cos x-\cos^2 x$



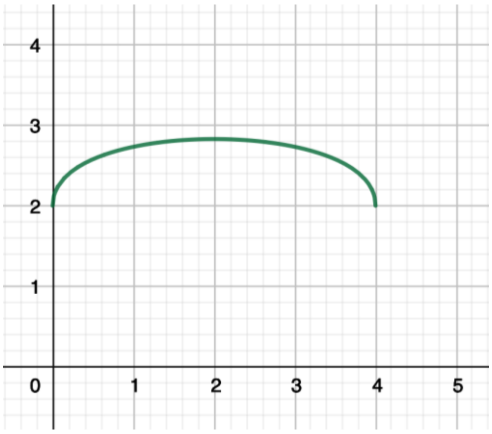
d) $y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$



e) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$



f) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$



11 Problemas de optimización

38. Halla un número positivo que, sumado con su inverso, dé un resultado mínimo.

El número buscado es $x=1$.

39. Se quiere construir un vaso reciclable con forma cónica y generatriz $\sqrt{6}$ cm. Calcula el radio del vaso cónico que tenga volumen máximo ¿Cuál ese volumen?

El vaso cónico de volumen máximo $V = 5{,}92\ cm^3$ tendrá de altura $h = \sqrt{2}$ cm y radio de la base $r = 2$ cm.

40. Construcción de un parterre. Un jardinero quiere construir un parterre en forma de sector circular y de perímetro 100 m. ¿Cuál debe ser el radio del parterre para que la superficie sea máxima?

El radio debe ser de 25m y, por tanto, la superficie del parterre de 625m^2

41. Encuentra un número que exceda a su cuadrado en el valor máximo posible.

El número buscado es $x = \frac{1}{2}$

43. Halla el punto más cercano al origen de la recta:

$$4x - y + 7 = 0$$

El punto más cercano al origen de la recta $4x - y + 7 = 0$ es $P\left(-\frac{28}{17}, \frac{7}{17}\right)$.

44. Diseño de un envase. Se quiere diseñar un envase para helado con forma de prisma regular de base cuadrada y con una capacidad de 80 cm^3. Para elaborar la tapa y la superficie lateral se usará determinado material cuyo valor es de $1\ \text{€}/\text{cm}^2$, pero para la base deberá utilizarse otro material que es un 50% más caro. Calcula las medidas que debe tener el envase para que el precio sea lo más barato posible.

El envase para helado con forma de prisma regular de base cuadrada más barato posible tendrá $4\ cm$ de largo, $4\ cm$ de ancho y $5\ cm$ de altura.

45. Vallado. Se desea vallar una parcela rectangular con 400 metros de alambre. ¿Cuál es la superficie máxima que se puede vallar si uno de los lados de la parcela limita con una pared?

Las dimensiones de la parcela rectangular que se quiere vallar son x=100 m , $y = 200$ m, siendo la superficie máxima con estas condiciones de $20000\ m^2$.

ACTIVIDADES

Recta tangente y técnicas de derivación

46. Dada la función $f(x)=3x^2-x$, calcula la tasa de variación media en los intervalos [0,1], [0,2] y [0,5].

$$TVM_{[0,1]}=2$$

$$TVM_{[0,2]}=5$$

$$TVM_{[05]}=14$$

47. En la siguiente tabla se muestra el valor en euros de un móvil a lo largo de sus cinco años de vida útil.

Año	0	1	2	3	4	5
Precio	600	500	350	180	100	40

Calcula la tasa de variación media entre los años:
a) 0 y 2 b) 3 y 5.

Entre los años 0 y 2 de vida del móvil la tasa de variación media es de -125 €.

Entre los años 3 y 5 de vida del móvil la tasa de variación media es de -70€.

48. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^2-3x+2$ b) $f(x)=x^3-7x^2-5x+2$ c) $f(x)=x^2-\frac{7}{x}$ d) $f(x)=x^2-2\sqrt{x}$

e) $f(x)=(2-5x)(2x^2+4x)$ f) $f(x)=\frac{2-5x}{x^2-2}$ g) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+2}$ h) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+2}$

i) $f(x)=\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}+1$ j) $f(x)=\left(\frac{2}{x-2}\right)^4$ k) $f(x)=\sqrt[3]{5x-2x^2}$ l) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

a) $f(x)=x^2-3x+2,\ f'(x)=2x-3$

b) $f(x)=x^3-7x^2-5x+2,\ f'(x)=3x^2-14x-5$

c) $f(x)=x^2-\frac{7}{x}\ ,\ f'(x)=2x+\frac{7}{x^2}$

d) $f(x)=x^2-2\sqrt{x}=x^2-2x^{1/2}\ ,\ f'(x)=2x-x^{-1/2}=2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x)=(2-5x)(2x^2+4x)\ ,\ f'(x)=-5(2x^2+4x)+(2-5x)(4x+4)=-30x^2-32x+8$

f) $f(x)=\dfrac{2-5x}{x^2-2}$, $f'(x)=\dfrac{-5\left(x^2-2\right)-\left(2-5x\right)\left(2x\right)}{(x^2-2)^2}=\dfrac{5x^2-4x+10}{(x^2-2)^2}$

g) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+2}$, $f'(x)=\dfrac{6x^2\left(x^2+2\right)-2x^3\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{2x^4+12x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$

h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+2}$, $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2+2\right)-\sqrt{x}\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{-3x^2+2}{\left(x^2+2\right)^2}$

i) $f(x)=\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}+1$, $f'(x)=\dfrac{-5}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$

j) $f(x)=\left(\dfrac{2}{x-2}\right)^4$, $f'(x)=4\left(\dfrac{2}{x-2}\right)^3\cdot\dfrac{-2}{\left(x-2\right)^2}=\dfrac{-64}{\left(x-2\right)^5}$

k) $f(x)=\sqrt[3]{5x-2x^2}=\left(5x-2x^2\right)^{1/3}$, $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(5x-2x^2\right)^{-2/3}\cdot\left(5-4x\right)=\dfrac{5-4x}{3\sqrt[3]{\left(5x-2x^2\right)^2}}$

l) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^{1/2}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^{-1/2}\cdot\dfrac{1\left(2-x\right)-x\left(-1\right)}{\left(2-x\right)^2}=\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$

49. Calcula la derivada de las siguientes funciones exponenciales o logarítmicas.

a) $f(x)=e^{-5x}+x$ b) $f(x)=3^{2x}$ c) $f(x)=x^2e^{2x}$ d) $f(x)=\frac{e^x}{1-x}$ e) $(x)=x^2\ln x$

f) $f(x)=\ln\sqrt{x}$ g) $(x)=\log_3\left(2x+1\right)$ h) $f(x)=(1-e^x)^4$ i) $(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ j) $(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$

a) $f(x)=e^{-5x}+x$, $f'(x)=-5e^{-5x}+1$

b) $f(x)=3^{2x}$, $f'(x)=2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3$

c) $f(x)=x^2e^{2x}$, $f'(x)=2xe^{2x}+x^2\cdot 2e^{2x}=2xe^{2x}\left(x+1\right)$

d) $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)-e^x(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x}{(1-x)^2}=\dfrac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$

e) $f(x)=x^2\ln x$, $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x\left(2\ln x+1\right)$

f) $f(x)=\ln\sqrt{x}=\ln\left(x\right)^{1/2}=\dfrac{1}{2}\ln x$, $f'(x)=\dfrac{1}{2x}$

g) $f(x)=\log_3\left(2x+1\right)$, $f'(x)=\dfrac{2}{\left(2x+1\right)\cdot\ln 3}$

h) $f'(x)=4(1-e^x)^3\cdot(-e^x)=-4e^x(1-e^x)^3$

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$, $f'(x)=\dfrac{2x\ln x - x^2\cdot\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$

j) $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$; $f'(x)=2xe^{-x}+(x^2+1)(-1)e^{-x}=e^{-x}(-x^2+2x-1)$

50. El tiempo t (en horas) que una persona de piel sensible puede estar expuesta al sol sin quemarse depende del índice ultravioleta, u, se puede modelar por:

$$t(u)=\frac{0{,}25u+20}{2u+1} \quad , \quad u\geq 0$$

a) ¿Cuánto tiempo puede exponerse al sol sin quemarse una persona con estas características si hay un índice ultravioleta de 3? ¿Y si es de 6?

b) Si el índice aumenta significativamente, ¿cuánto tiempo puede exponerse al sol esa persona?

a) Si hay un índice ultravioleta de 3 una persona puede exponerse al sol sin quemarse aproximadamente 2 horas y 58 minutos. Si hay un índice ultravioleta de 6 una persona puede exponerse al sol sin quemarse aproximadamente 1 hora y 39 minutos.

b) Si el índice aumenta significativamente esa persona puede exponerse al sol aproximadamente siete minutos y medio.

51. El precio, en euros, de una moto en función de su antigüedad en años, t, viene dado por: $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})=110(\boldsymbol{t}-10)^2+4000$, donde $0\leq \boldsymbol{t}\leq 10$.

a) ¿A qué precio se compró? ¿Cuál es su valor al cabo de 8 años?
b) ¿A qué ritmo decrece su valor a los 3 años? ¿Y a los 5 años? ¿Y a los 7 años?

a) Se compró a un precio: $p(0)=15000$ €

A los 8 años su valor es: $p(10)=4440$€

b) $p'(3)=-1540$ € disminuye su precio el tercer año.

$p'(5)=-1100$ € disminuye su precio el quinto año.

$p'(7)=-660$ € disminuye su precio el séptimo año.

52. Determina si la función $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{4e^{-x}}$ verifica la ecuación $\boldsymbol{xy'-3y=0}$.

Esta función no verifica la ecuación.

53. Estudia si la función $y=e^{2x}-3e^{-x}$ verifica la ecuación $y''-y'-2y=0$.

Sí verifica la ecuación.

54. Determina los puntos de la curva $y=\dfrac{1}{2}x^2+4x+4$ en los que la recta tangente pasa por el origen de coordenadas.

Los puntos de tangencia son: $P_1\left(-2\sqrt{2},8-8\sqrt{2}\right)$ y $P_2\left(2\sqrt{2},8+8\sqrt{2}\right)$.

55. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 + 2e^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(0,2)$ es: $y-2=2(x-0) \Rightarrow 2x-y+2=0$

La ecuación de la recta normal $P(0,2)$ es: $y-2=-\frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow x+2y-4=0$

56. Determina los coeficientes de la curva $y = ax^2 + bx$ si la ecuación de la recta tangente en el punto (1,1) es: $3x - y - 2 = 0$.

La curva pedida es: $y = 2x^2 - x$

57. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{e^x}{x^2+1}$ en el punto de abscisa x=1.

La ecuación de la recta tangente el punto de abscisa x=1 es:

$$y-\frac{e}{2}=0(x-1) \Rightarrow y=\frac{e}{2} \Rightarrow \text{(recta horizontal)}$$

58. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 0$ es:

$$x - 4y + 2 = 0$$

59. El peso en kilogramos de un toro se puede modelar por la función $f(t) = 1200 - 1140e^{-0,4t}$, siendo t el tiempo en años.

a) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que el toro pese 800 kg?

b) ¿Es cierto que el peso del toro aumenta muy rápido al comienzo de su vida, para luego crecer más lentamente? Compruébalo calculando el ritmo de crecimiento al cabo de uno, dos y tres años.

a) Debe transcurrir aproximadamente dos años y siete meses para que el toro pese 800 kg.

b) Efectivamente, aumenta su peso muy rápido al principio, pero decrece más lentamente al cabo de los años.

60. Xinjie y Noelia son dos compañeros universitarios aficionados a la cocina y van a preparar su plato favorito "pavo al horno con sala bárbara y hojas de ciprés". La temperatura, en grados centígrados, que mantiene el pavo t minutos después de sacarlo del horno se puede modelar mediante la función: $T(t) = 62e^{-0,13t} + 23$.

a) ¿A qué temperatura salió el pavo del horno?

b) ¿A qué ritmo disminuye la temperatura del pavo después de un minuto de estar en la mesa? ¿Y tras tres minutos?

a) Al sacar el pavo del horno la temperatura que tiene es de $85^{\circ}C$

b) Después de un minuto disminuye a un ritmo de $7^{\circ}C$. Después de tres minutos disminuye a un ritmo de $5\ ^{\circ}C$

61. Halla la pendiente de la curva $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ en el punto de abscisa x = -1.

La pendiente de la curva en el punto de abscisa $x=-1$ es: $m=f'(-1)=\dfrac{9}{10\sqrt{10}}=\dfrac{9\sqrt{10}}{100}$

62. Considera la curva $f(x)=\dfrac{x^2}{x-a}$, donde a es un número real. Encuentra para qué valores de a la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=1$ es paralela a la recta $3x+y-3=0$.

Los dos valores de a para los cuales la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=1$ es paralela a la recta dada son $a=2$ y $a=\dfrac{2}{3}$.

63. Halla la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$, sabiendo que pasa por el punto (1,3) y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante.

La ecuación de la parábola buscada es: $y=2x^2+x$

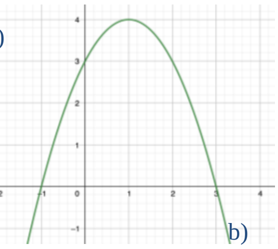
64. Sea la función $f(x)=x-\dfrac{a}{x}$, $x\neq 0;\ x=0.$ Determina el valor de a para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x=2$.

Para $a=-4$, $f''(2)=\dfrac{-2(-4)}{8}=1>0$, hay un máximo relativo en $x=2$.

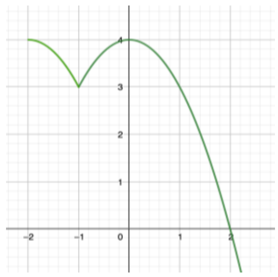
❖ Crecimiento, decrecimiento y extremos

65. A continuación, se muestran las gráficas de la función f' derivada de una función f. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento? ¿Hay algún extremo relativo? ¿Es máximo o mínimo?

a)



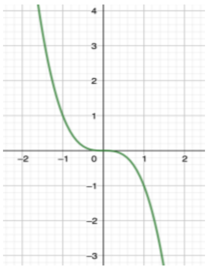
b)

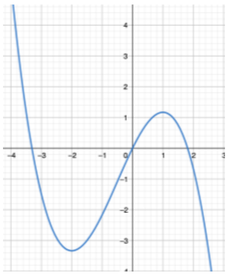


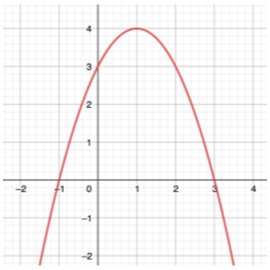
a) En $x=-1$ la curva f pasa de decrecer a crecer y, por tanto, hay un mínimo relativo. Mientras que en $x=3$ la curva f pasa de crecer a decrecer y, en consecuencia, hay un máximo relativo.

b) En $x=2$ la curva f pasa de crecer a decrecer y, por tanto, hay un máximo relativo.

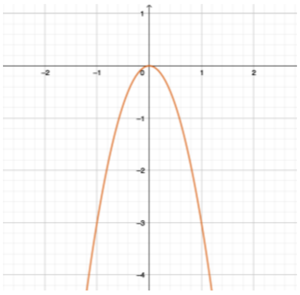
66. Dibuja de forma aproximada, a partir de la gráfica de cada función, la gráfica de su función derivada correspondiente.

a) 

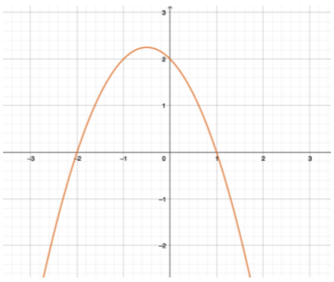
b) 

c) 

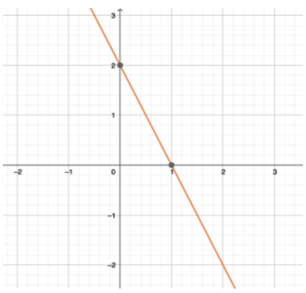
a) La gráfica de $f'(x)$ es:



b) La gráfica de $f'(x)$ es:



c) La gráfica de $f'(x)$ es:



67. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=x^3-3x^2+4$ b) $f(x)=x^4-x^2-3$ c) $f(x)=xe^{-x}$

d) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ e) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ f) $f(x)=\ln(1-x^2)$

$g)\ f(x)=xe^{x-1}$

a) La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty,0)\cup(-1,+\infty)$ y dereciente en $(0,2)$. Además, hay un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$.

b) La función $f(x)$ es creciente en ,$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$y dereciente en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Además, hay un máximo relativo en $x=0$ y dos mínimos relativos en $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty,1)$ y dereciente en $(1,+\infty)$. Por otra parte, hay un máximo relativo en $x=1$.

$d)$ $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty,-3)$, $(-1,0)y\ (1,+\infty)$, y decreciente en $(-3,-1)$ Hay un máximo relativo en $x=-3$.

e) $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$ y decreciente en $(0,1)y(1,+\infty)$. Hay un máximo relativo en $x=0$.

f) La función $f(x)$ es creciente en $(-1,0)$, decreciente en $(0,1)$ y tiene un máximo relativo en $x=0$.

g) La función $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-1)$ y creciente en $(-1,+\infty).$). Por otra parte, hay un mínimo relativo en $x=-1$

68. Halla los máximos y mínimos relativos de estas funciones:

$$d)\ f(x)=\ln(x^2+1)$$

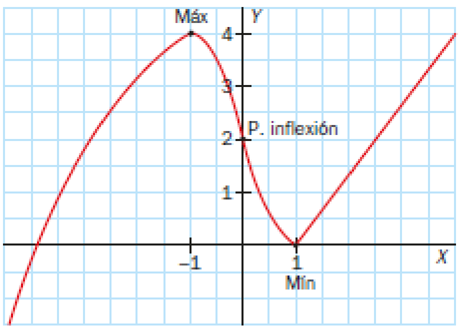
La función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x=0$, es decir, en el punto P(0,0).

69. Dibuja la gráfica de una función que verifique:

$f(-1)=4 \quad f(1)=0 \quad f'(x)<0, \text{si} -1<x<1 \quad f'(-1)=0 \quad \text{ó} f'(1)$

$f'(x)>0, \text{si } x<-1 \text{o } x>1 \quad f''(x)>0, \text{si } x>0 \quad f''(x)<0, \text{ si } x<0$

La gráfica de una función $f(x)$ que verifique las condiciones del enunciado puede ser la siguiente:



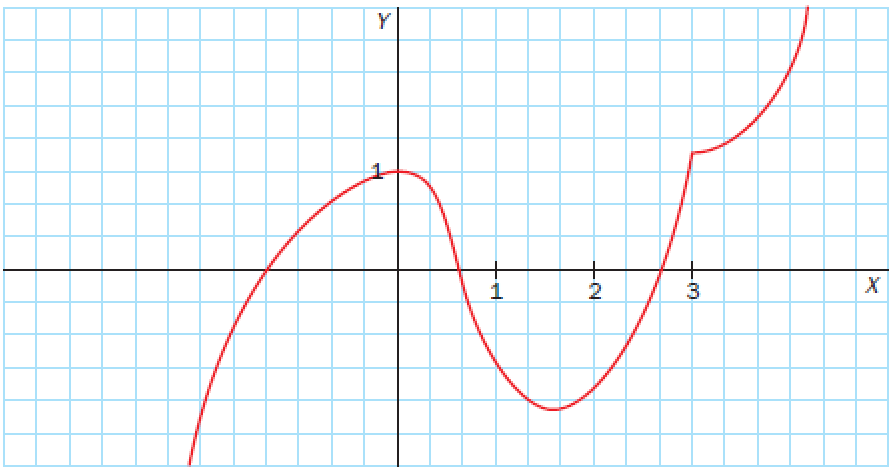
70. Esboza la gráfica de una función que cumple las condiciones siguientes:

$$f'(x)<0 \text{ en } (0,1)$$

$$f'(x)>0 \text{en } (-\infty,0)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$$

$$f'(0)=f'(1)=f'(3)=0$$

Una gráfica que cumpla estos requisitos puede ser:



71. Encuentra el valor de los coeficientes de la parábola $y=ax^2+bx+c$, sabiendo que pasa por el punto $P(-2, 5)$ y tiene un mínimo relativo en $M(5, 8)$

El valor de los coeficientes es: $a=-\frac{13}{49}, b=\frac{130}{49}, c=\frac{67}{49}$

72. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x)=axe^{bx^2}$ tiene un máximo relativo en el punto $(2,1)$.

Si $a=\frac{\sqrt{e}}{2}$ y $b=-\frac{1}{8}$, la función $f(x)=axe^{bx^2}$ tiene un máximo relativo en el punto (2,5).

73. Se lanza un cohete, y este, al cabo de t segundos, alcanza una altura, en metros, que viene dada por $f(t)=500t-5t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Al cabo de cuántos segundos lo hace?

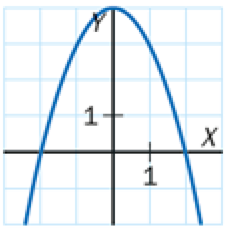
Al cabo de 50 segundo el cohete alcanza la altura máxima de 12 500 m

74. Calcula los valores de *a, b* y *c* en la función $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$ sabiendo que esta tiene un extremo relativo en *x*=1 y que la recta tangente a su gráfica en *x*=0 es *y* = *x*+3.

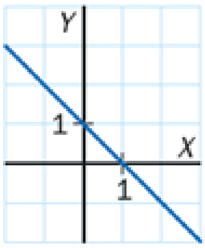
La función pedida es: $f(x)=x^3-2x^2+x+3$

75. Analiza la gráfica de la derivada de las siguientes funciones para determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

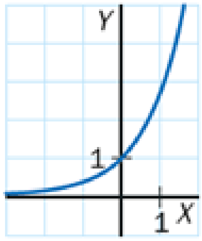
a) $f'(x)$



b) $g'(x)$



c) $h'(x)$



a) Como en $x=-2$ la curva $f(x)$ pasa de decrecer a crecer, entonces tiene un mínimo relativo. Sin embargo, en $x=2$ la curva $f(x)$ pasa de crecer a decrecer y entonces tiene un máximo relativo en dicho punto.

b) En $x=1$ la curva $g(x)$ pasa de crecer a decrecer y entonces tiene un máximo relativo en dicho punto.

c) $h'(x)>0$,$\forall x\in\mathbb{R}$ y, por tanto, es creciente en todo $\mathbb{R}$.

76. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x)=(x+1)e^{-x}$ b) $f(x)=(x+3)^2e^{-x}$

a) $f(x)=(x+1)e^{-x}$, $D(f)=\mathbb{R}$

b) La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty,0)$, decreciente en $(0,+\infty)$ y tiene un máximo relativo en $x=0$.

c) $f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty,-3)$ y $(-1,+\infty)$ y creciente en $(-3,-11)$. Hay un mínimo relativo en $x=-3$ y un máximo relativo en $x=-1$.

77. Determina el valor de b para que la función $f(x) = x^3 - bx^2$ tenga un extremo relativo en $x = -3$. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

b = - 9/2

❖ Concavidad y puntos de inflexión

78. Halla los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de las siguientes curvas:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3$ b) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ c) $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

a) La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y convexa en $(0,1)$. Además, tanto en $x = 0$ como en $x = 1c$ ambia de curvatura y, en consecuencia, son puntos de inflexión.

b) La función es cóncava en $(1, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, 1)$. Así mismo, en $x = 1c$ ambia de curvatura y, en consecuencia, hay punto de inflexión.

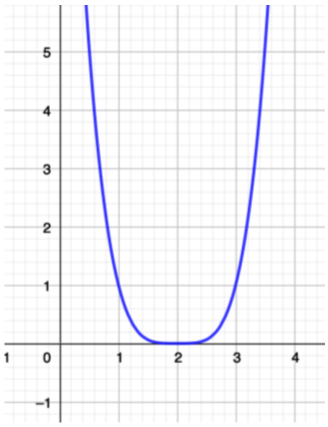
c) La función es cóncava en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ y convexa en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$. Así mismo, en $x = \frac{3}{2}$ Cambia de curvatura y, en consecuencia, hay punto de inflexión.

79. Prueba que, si bien $\boldsymbol{f(x) = x^4}$ verifica $\boldsymbol{f''(0) = 0}$, el punto $\boldsymbol{(0,0)}$ no es un punto de inflexión.

La función $f(x) = x^4$ verifica que $f''(x) = 12x^2 \geq 0$,$\forall x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, es convexa en todo su dominio. En consecuencia, el punto $(0,0)$ no es un punto de inflexión.

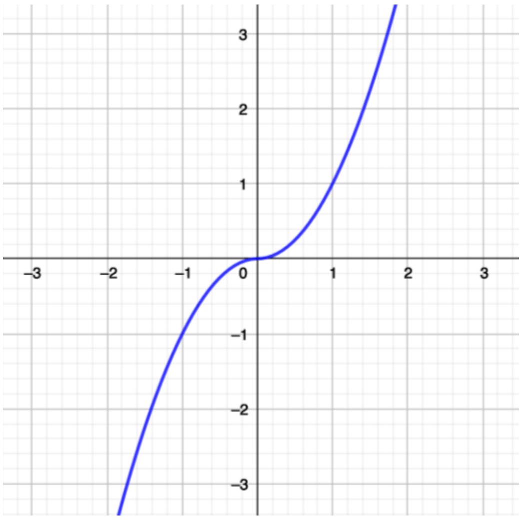
80. Prueba que la función $f(x) = (x-2)^4$ tiene extremo relativo en x=2, si bien $f''(2) = 0$. ¿Tiene $f(x)$ puntos de inflexión?

La función siempre es cóncava y no tiene puntos de inflexión. (Observa su gráfica)



81. Comprueba que la función $f(x)=x|x|$. ¿Tiene punto de inflexión en $(0,0)$? ¿Existe $f''(0)$?

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en (0,0), pero, sin embargo, no existe $f''(0)$.



82. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+a}$, donde $a\in\mathbb{R}$.

a) Halla el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=\sqrt{3}$.

b) Para $a=4$, halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la curva.

a) Para $a=3$ la función $f(x)$ tiene extremo relativo en $x=\sqrt{3}$.

b) La función tiene puntos de inflexión en $x=0, x=-3\sqrt{2}$ y $x=3\sqrt{2}$.

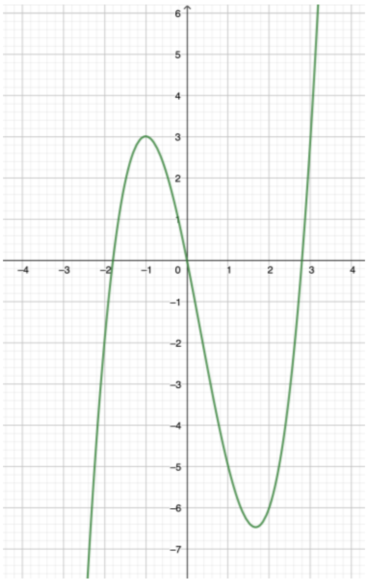
❖ Dibujo de curvas

83. Representa gráficamente las siguientes funciones:

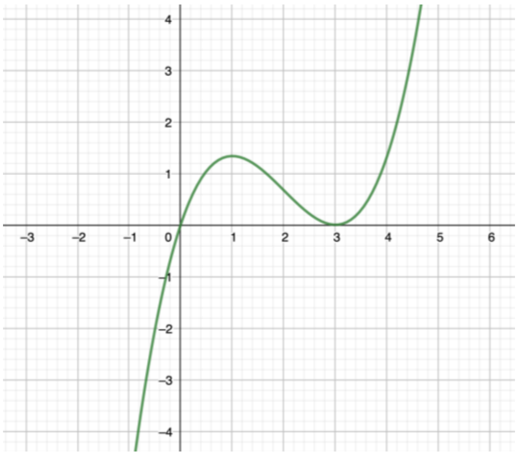
a) $y=x^3-x^2-5x$ b) $y=\dfrac{1}{3}x(x-3)^2$ c) $y=x^3-3x^4$ d) $y=x^4+2x^3$

e) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ f) $f(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$

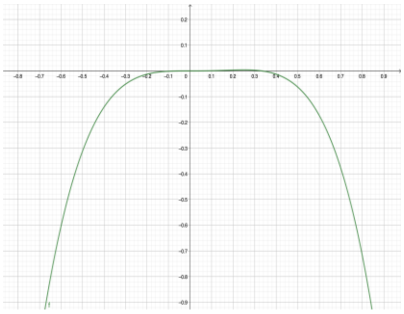
a) $y = x^3 - x^2 - 5x$



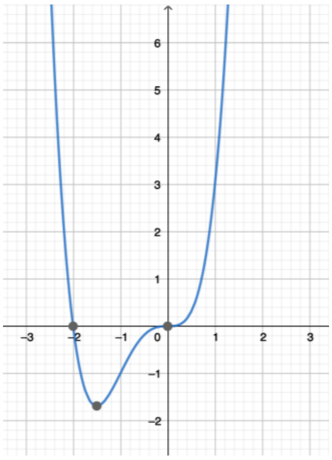
$\boldsymbol{b})\ y = \frac{1}{3}x\left(x-3\right)^2 = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$



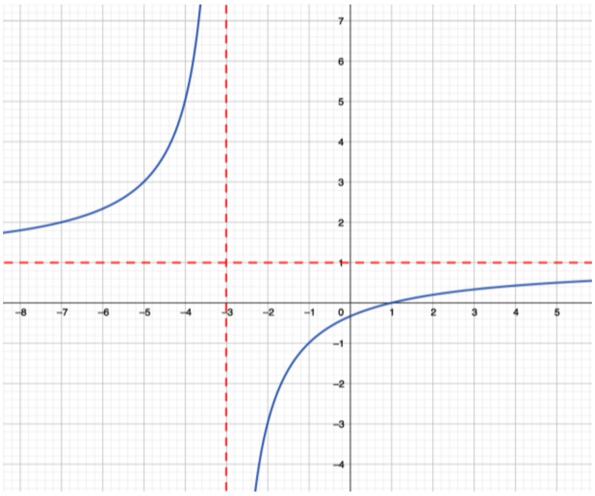
c) $y = x^3 - 3x^4$



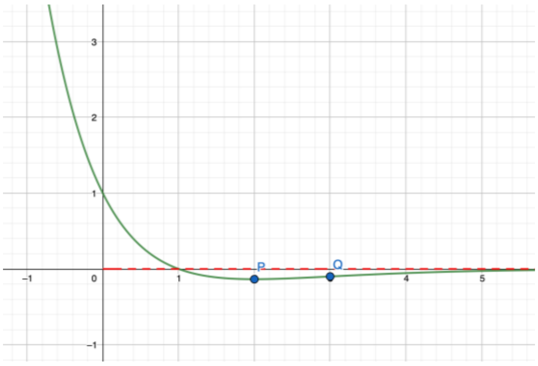
d) $y = x^4 + 2x^3$



e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

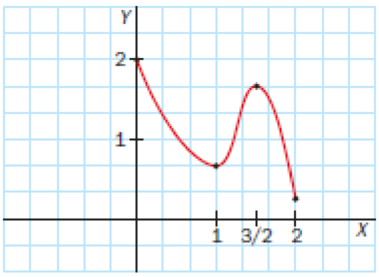


d) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$



85. Dibuja la gráfica de una función que sea continua en el intervalo [0,2] y tenga un máximo absoluto en $x=0$, un mínimo absoluto en $x=2$, un mínimo relativo $x=1$ y un máximo relativo en $x=\dfrac{3}{2}$.

Una función que cumple las condiciones del enunciado es la siguiente:

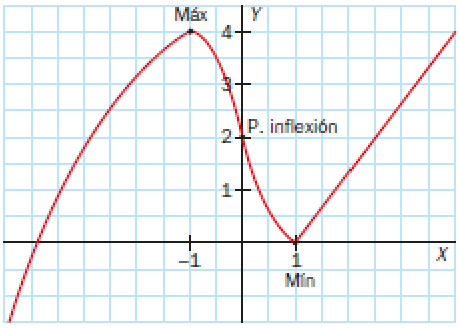


86. Dibuja la gráfica de una función que verifique:

$f(-1)=4$ $\quad f(1)=0$ $\quad f'(x)<0, \text{si } -1<x<1$ $\quad f'(-1)=0$ $\quad \text{ó} f'(1)$

$f'(x)>0, \text{si } x<-1 \text{o } x>1$ $\quad f''(x)>0, \text{si } \ x>0$ $\quad f''(x)<0, \ \text{si } x<0$

La gráfica de una función $f(x)$ que verifique las condiciones del enunciado puede ser la siguiente:



❖ Optimización

88. Halla los extremos absolutos de:

a) $f(x)=2x^2-5x+2$ en [0,4] b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en [0,3].

a) El valor mínimo es $f\left(\dfrac{4}{5}\right)=-1{,}125$ y el máximo $f(1)=14$.

b) El valor mínimo es $f(0)=0$ y el máximo $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

89. Determina el punto de la curva $y=\sqrt{2x}$. más próximo al punto (1,4).

El punto $P(2,2)$ de la curva $y=\sqrt{2x}$ es el que está situado a menos distancia del punto

90. De todos los rectángulos de 20 cm de perímetro, determina el que tenga diagonal mínima.

El rectángulo de perímetro 20 cm y diagonal mínima $d=5\sqrt{2}$, es el cuadrado de lado 5 cm, puesto que $a=b=5$.

91. Un alambre enrollado de 100 m de longitud se divide en dos partes. Con una de ellas se construye una circunferencia y, con la otra, un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea mínima?

Para minimizar la suma de las áreas del círculo y del cuadrado hay que dividir el alambre en dos partes: una de aproximadamente 44 metros y construir el círculo y, otra, de 56 metros para la construcción del cuadrado. De esta manera se obtiene un área mínima de aproximadamente $350,06m^2$.

92. Halla un punto de la curva $y = 4 - x^2$, en el que su tangente determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados, un triángulo de área máxima.

El punto de tangencia que cumple las condiciones es $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{8}{3}\right)$.

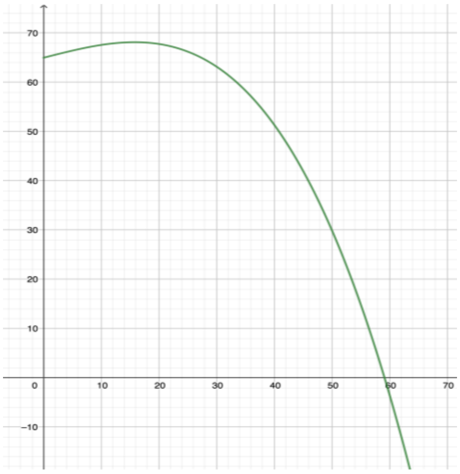
93. Un trozo de queso se sitúa en el punto (12,10) y un ratón se mueve a lo largo de la recta $y = 18 - 5x$ y cuando está convencido de que se encuentra lo más cerca posible del queso, se para. ¿En qué punto se parará?

El punto pedido y donde se parará el ratón es $P(2,8)$.

Aplicaciones

94. Costes y beneficios. Determina el número de unidades x que se deben fabricar para maximizar el beneficio obtenido por la venta de un producto, sabiendo que los costes vienen dados por $C(x) = 0,0004x^3 - 0,02x^2 + 2x - 65,$ y los ingresos por $I(x) = -0,02x^2 + 2,3x$, medidos en miles de euros en ambos casos.

Se deberán fabricar 16 unidades con el fin de obtener un beneficio máximo de aproximadamente 68162 euros. (Observa su gráfica).



95. Precio de venta. Una asesora de ventas de un concesionario de automóviles vende 50 coches al mes a un precio de 20000 euros cada uno. Por cada coche que venda de más, puede bajar el precio en 300 euros. ¿Cuánto coches debe vender al mes para obtener el máximo ingreso por ventas?

La asesora de ventas del concesionario deberá vender 58 coches al mes con el fin de lograr unos ingresos máximos por venta 1020800 euros.

97. Venta *online*. Un fabricante vende *on-line* 1000 ordenadores portátiles por semana, a razón de 450 euros cada uno. Por cada 10 euros de descuento que ofrece, el número de portátiles vendidos se incrementa en 100 por semana.

a) Calcula la función de demanda.

b) ¿Cuántos portátiles y a qué precio debe vender para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

a) La función de demanda es:

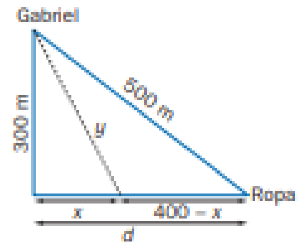
$$p(x)=450-\frac{10}{100}(x-1000)=550-0,1x \quad , \quad x\geq 0$$

b) Debería vender 2750 ordenadores a la semana con el fin de obtener unos ingresos máximos de 756250 €. Por otra parte, el precio de cada ordenador debería ser de 275 €, es decir, con un descuento de 175 € sobre el precio inicial de 450 €.

98. Efecto publicitario. La efectividad de un anuncio publicitario en internet depende del número de veces que una persona lo vea. Una empresa publicitaria ha encontrado un modelo que le permite analizar la efectividad y viene dado por $E(x)=0,9x-0,15x^2$, donde x es el número de veces que se ve el anuncio. ¿Cuántas veces debe ver el anuncio una persona para que tenga máxima efectividad?

Una persona deberá ver el anuncio tres veces para lograr la máxima efectividad dada por: $E(3)=1,35$

99. Distancia mínima. Mientras Gabriel se da un baño en el mar, se desencadena una tormenta repentina. Gabriel piensa en cómo llegar hasta la orilla para recoger su ropa, y duda entre dos opciones: ir nadando directamente hacia su ropa, o salir del agua en otro punto y llegar corriendo por la orilla hasta ella. Su velocidad por tierra es de 6 m/s, y nadando, de 2 m/s. Si se encuentra, en línea recta, a 500 m de la ropa y a 300 m de la orilla, ¿cuál es el mejor camino que puede seguir?



Gabriel deberá ir nadando 318 m y por tierra 294 m, logrando un tiempo mínimo de 208 segundos, o sea, aproximadamente tres minutos y medio.

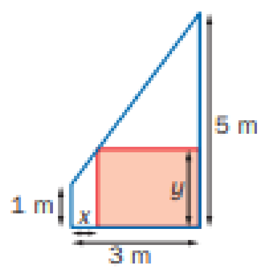
100. Dimensiones de un armario. Se desea construir un armario rectangular en el hueco de una escalera de un chalet como muestra la figura.

a) Expresa el área del rectángulo en función de la longitud x.

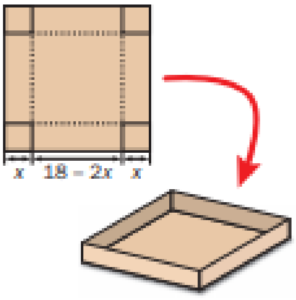
b) Determina las dimensiones del rectángulo que tenga superficie máxima.

a) El área en función de la longitud x es: $A(x)=(3-x)\cdot y=(3-x)\cdot\frac{5}{3}x=5x-\frac{5}{3}x^2$, $x>0$

b) El armario tendrá $1,5\text{m}$ de longitud y $2,5\text{ m}$ de altura, siendo su superficie máxima de $3,75\text{ m}^2$.



101. Dimensiones. Se quiere fabricar un vaciabolsillos con una pieza cuadrada de polipiel de 18cm de lado, cortando cuadrados iguales partiendo de las esquinas y luego doblándolos. Calcula el lado del cuadrado que se debe cortar para que el volumen del vaciabolsillos sea el máximo posible.



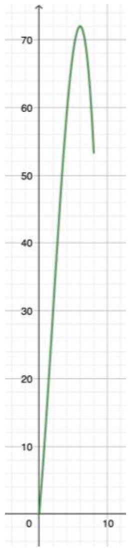
Habrá que cortar un cuadrado de 3 cm de lado y así conseguir un vaciabolsillos de volumen máximo igual a $432\,\text{cm}^3$

102. Propagación noticia. En un centro escolar de 200 estudiantes, la propagación de una noticia es directamente proporcional al número de estudiantes que la conocen y al número de estudiantes que no la conocen todavía. Demuestra que la noticia se propaga más rápidamente si la mitad de los estudiantes la conocen.

La noticia se propaga más rápidamente si la mitad de los estudiantes la conocen.

103. Rendimiento laboral. Un operario comienza su jornada laboral todos los días a las 8:00 horas. Después de t horas de trabajo, su rendimiento diario es: $R(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 12t$. ¿A qué hora de su jornada laboral alcanzará el máximo rendimeinto? Esboza su gráfica

Alcanzará el máximo rendimiento a las seis horas de haber comenzado su trabajo, es decir, a las 14.00 horas. El rendimiento crece hasta esa hora, para disminuir posteriormente. (Observa su gráfica)



7. Derivadas

Un mundo matemático

1. Halla la tasa de variación media entre los ejercicios 2013 y 2015, y entre 2017 y 2020.

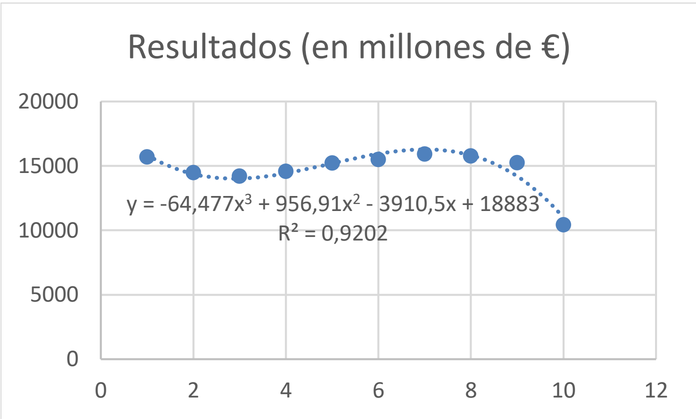
La tasa de variación media entre los años 2013 y 2015 fue $499,5$ millones de euros

Y entre los años 2017 y 2020 fue $-1834,3$ millones de euros

2. Considera el año 2011 como $x = 1$, el año 2012 como $x = 2$, y así sucesivamente, y utiliza Excel, GeoGebra o cualquier otro software o calculadora gráfica para ajustar una función $f(x)$ polinómica de grado tres que proporcione la cifra de negocio en función de x.

Mediante Excel el polinomio de grado tres que mejor se ajusta a estos datos es el siguiente:

$$f(x) = -64,477x^3 + 956,91x^2 - 3910,5x + 18883$$



3. Calcula las derivadas primera y segunda de $f(x)$.

La derivada primera es:

$$f'(x) = -193,431x^2 + 1913,82x - 3910,5$$

Y la derivada segunda es:

$$f''(x) = -386,862x + 1913,82$$

4. Determina con el modelo ajustado y $f'(x)$ en qué intervalos aumentaron los resultados y en cuáles disminuyeron. ¿Coinciden con los datos del diagrama de barras?

Disminuyen las cifras de negocio de 2011 a 2013, alcanzado el mínimo en el año 2013. A su vez, aumentan desde 2013 hasta 2017, logrando el máximo en el año 2017. A partir del año 2017 descienden hasta finalizar el período estudiado en 2020.

Por otra parte, podemos observar que coincide con los datos facilitados en el diagrama de barras.

5. Encuentra el ejercicio en el que los resultados tuvieron una mayor tasa de crecimiento mediante $f'(x)$.

En el año 2015 (x=5) hay un punto de inflexión y, por tanto, se produjo una mayor tasa de crecimiento.

6. Investiga la situación económica en nuestro país desde el 2015 al 2020. ¿Existe alguna relación con los datos de El Corte inglés?

En El Corte Inglés hubo un crecimiento entre 2015 y 2017, pero en los años siguientes descendieron las cifras de negocio y no coinciden con el PIB. Obviamente el año 2020 fue malo para todos.

7. Los datos de los últimos años, ¿han provocado cambios en los puestos directivos de El Corte Inglés? ¿Su plan estratégico se ha visto afectado?

Respuesta abierta que debes encontrar buceando en internet y especialmente en la web de El Corte Inglés.

8. Investiga en la web de El Corte Inglés la responsabilidad social corporativa en aspectos como la producción y consumo responsables, la digitalización verde, acciones por el clima, la igualdad, la diversidad y el compromiso social.

Respuesta abierta que debes encontrar buceando en internet y especialmente en la web de El Corte Inglés.

9. ¿Cómo realiza El Corte Inglés el reciclaje de residuos electrónicos?

Respuesta abierta que debes encontrar buceando en internet y especialmente en la web de El Corte Inglés.