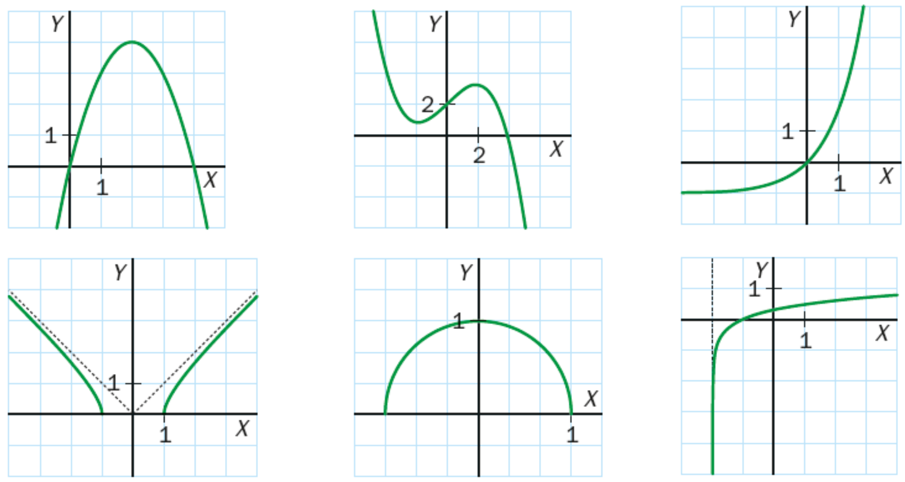
2 Dominio y recorrido

1. Observa las siguientes gráficas y determina el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes:



a) $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=(-\infty,4]$

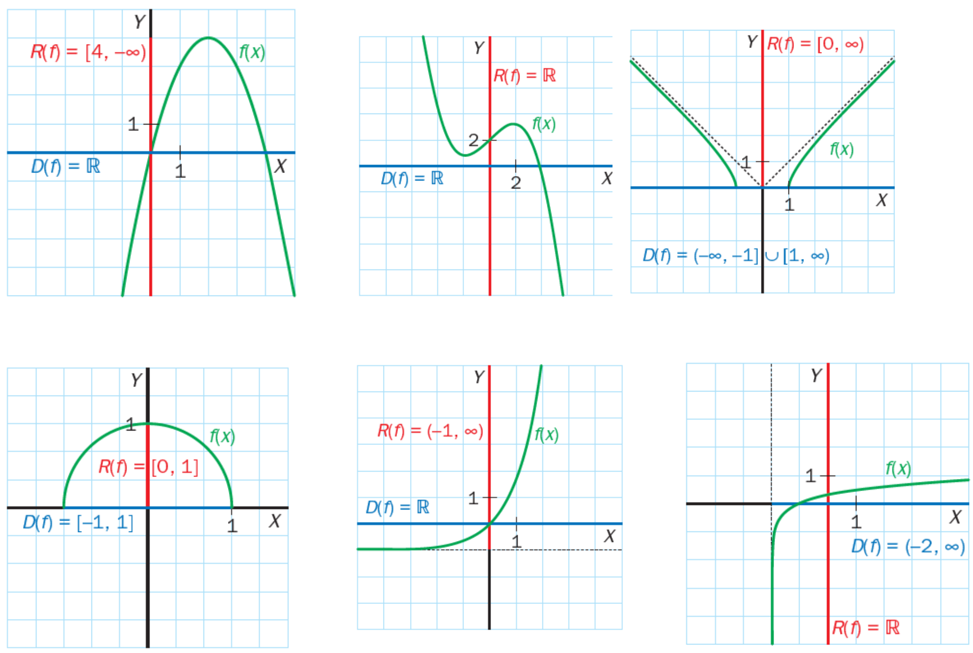
b) $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=\mathbb{R}$

c) $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)=\mathbb{R}-(-1,1)$ y $R(f)=(0,\infty]$

d) $D(f)=[-1,1]$ y $R(f)=[0,1]$

e) $D(f)=\mathbb{R}$ y $R(f)=(-1,\infty)$

f) $D(f)=(-2,\infty)$ y $R(f)=\mathbb{R}$



2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4-5x^2+3$

b) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+8x+16}$

c) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-x-2}$

d) $f(x)=\dfrac{sen(x)}{1-\cos(x)}$

e) $f(x)=\sqrt[5]{x^2-1}$

f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

g) $f(x)=e^{2x}$

h) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$

i) $f(x)=\log_2\left(4-x^2\right)$

j) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

k) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$

l) $f(x)=e^{1/x}$

m) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

n) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

a) $D(f)=\mathbb{R}$

c) $D(f)=(-\infty,-1]\cup[2,\infty)=\mathbb{R}-(-1,2)$

e) $D(f)=\mathbb{R}$

g) $D(f)=\mathbb{R}$

i) $D(f)=(-2,2)$

k) $D(f)=\mathbb{R}$.

m) $D(f)=(1,\infty)$

l) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

3 Puntos de corte con los ejes

3. Localiza los puntos de corte con los ejes de estas funciones:

a) $f(x)=5x+3$

b) $f(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^4-5x^2+4$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

e) $f(x)=e^x$

f) $f(x)=\log x$

g) $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+5}$

a) $OX:\left(-\dfrac{3}{5},0\right);OY:(0,3)$

b) *OX:* No tiene puntos de corte con el eje de abscisas. $OY:(0,2)$

c) $OX:(\pm1,0),(\pm2,0);OY:(0,4)$

d) $OX: (\pm 1, 0)$; *OY*: No tiene punto de corte con el eje de ordenadas.

e) OX: No tiene puntos de corte con el eje de abscisas. $OY: (0,1)$

f) OX: $(1,0)$, OY: No tiene punto de corte con el eje de ordenadas.

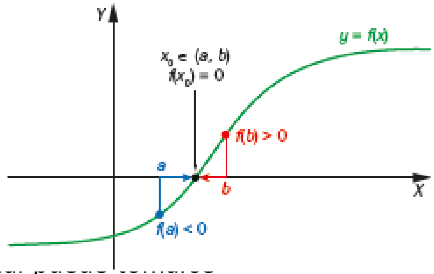
g) $OX: (-2,0),(1,0),(4,0)$; $OY:$ Þ$(0,8)$

h) $OX: (\pm 2, 0)$; $OY: \left(0, -\frac{4}{5}\right)$

4. Aproximación de una raíz por bisección. A veces no es posible resolver de manera exacta cierta ecuación f(x) = 0. Pero si la función f(x) puede dibujarse de forma continua en un intervalo [a,b] donde su valor cambia de signo, está claro que en algún punto x0 de su interior esta debe cruzar el eje OX y anularse (teorema de Bolzano).

Así pues, con hacer tal intervalo lo suficientemente pequeño sin más que dividirlo una y otra vez por la mitad, podemos hallar la raíz de la ecuación con la precisión que deseemos. Es el llamado método de la bisección.

Teniendo esto en cuenta, resuelve de manera aproximada la ecuación x = cos x. Para ello, parte de la función f(x) = x - cos x en el intervalo [0,1] y obtén su raíz con un error de aproximación de una centésima.



$f(x) = x - \cos x = 0$ para un valor aproximado $x_0 = 0,74 \pm 0,01$, el cual puede tomarse como solución de la ecuación $x = \cos x$ con un error de aproximación de una centésima, como pedía el enunciado.

4 Simetría

5. En el margen puedes ver un par de salvapantallas diseñados de manera digital.

Algunas de sus líneas podrían reproducirse mediante las gráficas de ciertas funciones.

¿Identificas las simetrías presentes en ellas? ¿Qué simetría dirías que domina en cada una de las imágenes?

En la primera imagen: simétricas respecto del eje de ordenadas, *OY,* tales que $f(-x) = f(x)$.

En la segunda imagen: simétricas respecto del origen de ordenadas,
O, tales que $f(-x) = -f(x)$.

6. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x^2+2$ **b)** $f(x)=5x^3-4x$ **c)** $f(x)=x^2-3x$

d) $f(x)=\sqrt{x^4-1}$ **e)** $f(x)=e^{-x^2}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

a) Función par.

b) Función impar.

c) Esta función no es par ni impar.

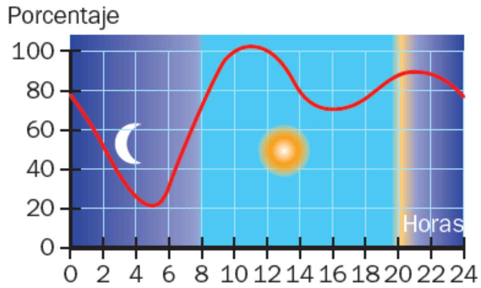
d) Función par.

e) Función par.

f) Función impar.

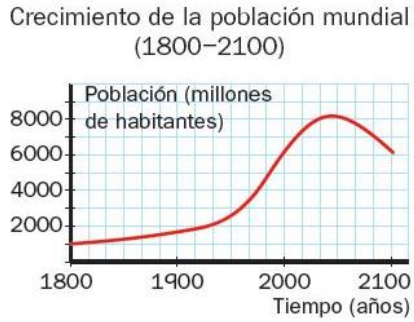
5 Crecimiento, acotación y curvatura

7. Rendimiento personal. La siguiente gráfica representa la curva del rendimiento diario medio de una persona. Analiza su crecimiento y localiza sus extremos.



El rendimiento de una persona aumenta entre las 5:00 y las 11:00 horas, y entre las 16:00 y las 21:00; disminuye entre las 0:00 y las 5:00 horas, y entre las 11:00 y las 16:00; es máximo a las 11:00 y a las 21:00 horas, y mínimo a las 5:00 y a las 16:00 horas.

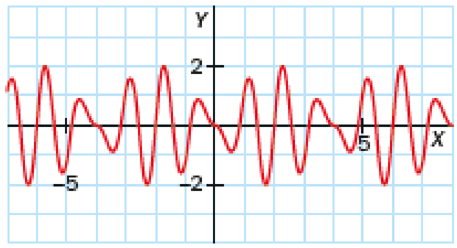
8. Estudio poblacional. Observa la gráfica y responde: ¿en qué década comenzó a ralentizarse el crecimiento de la población mundial? ¿Cuándo se espera que esta alcance su valor máximo?



Podríamos decir que el crecimiento de la población mundial empezó a ralentizarse en la década de los años 80. En torno al año 2050 parece que esta alcanzará su máximo.

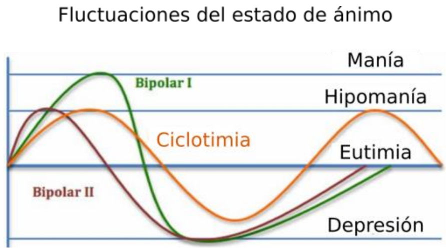
6 Periodicidad

9. Comprueba la periodicidad de la función que aparece en la gráfica del margen y determina su periodo.



El periodo de esta función periódica es $T = 4$.

10. Salud mental. En la gráfica puedes observar las fluctuaciones periódicas del estado de ánimo entre la manía y la depresión sufridas por personas con distintos trastornos. ¿Cuál de estos desórdenes presenta un mayor periodo?



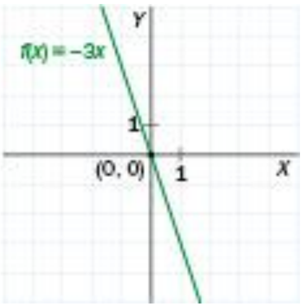
Presenta mayor periodo el trastorno bipolar I.

7 Funciones polinómicas

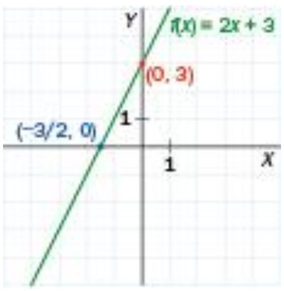
11. Representa estas funciones polinómicas de primer grado:

a) $f(x) = -3x$ **b)** $f(x) = 2x + 3$ **c)** $f(x) = 2 - 4x$

a)



b)

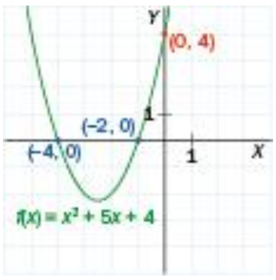


c)

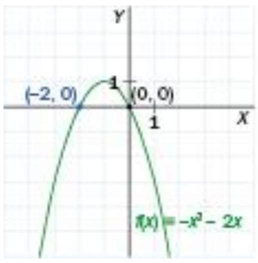
12. Representa estas funciones polinómicas de segundo grado:

a) $f(x) = x^2 + 5x + 4$ **b)** $f(x) = -x^2 - 2x$ **c)** $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

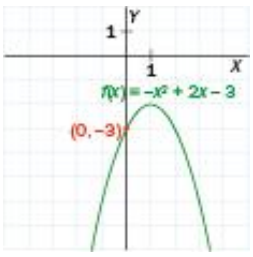
a)



b)



c)

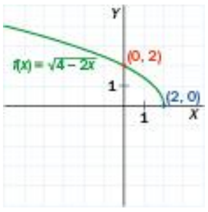


8 Funciones con radicales

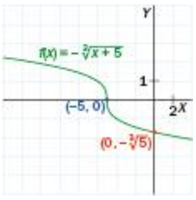
13. Determina el dominio de las siguientes funciones con radicales y represéntalas gráficamente. ¿Alguna de ellas posee algún tipo de simetría?:

a) $f(x)=\sqrt{4-2x}$ **b)** $f(x)=-\sqrt[3]{x+5}$ **c)** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

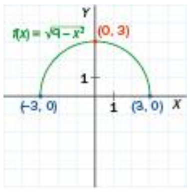
a) $D(f)=(-\infty,2]$



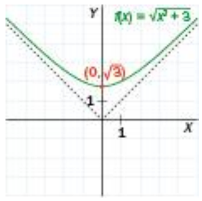
b) $D(f)=\square$



c) $D(f)=[-3,3]$

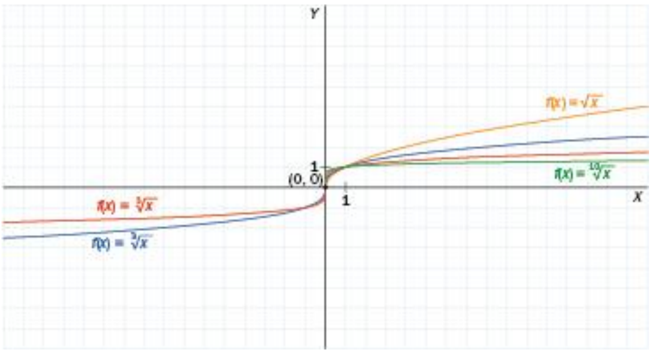


d) $D(f)=\square$



14. En una misma gráfica, representa estas funciones con radicales dentro del intervalo [0,2] y estudia su comportamiento. ¿Cuál de ellas es mayor?

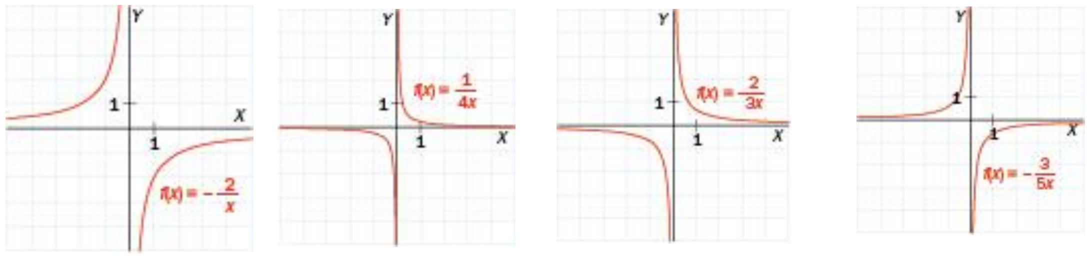
a) $f(x)=\sqrt{x}$ **b)** $f(x)=\sqrt[3]{x}$ **c)** $f(x)=\sqrt[5]{x}$ **d)** $f(x)=\sqrt[10]{x}$



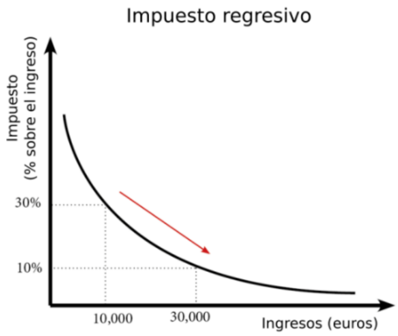
9 Funciones racionales

15. Representa estas funciones racionales y comprueba en cada una de ellas que el producto $x{\cdot}y$ se mantiene constante:

a) $f(x)=-\dfrac{2}{x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{4x}$ **c)** $f(x)=\dfrac{2}{3x}$ **d)** $f(x)=-\dfrac{3}{5x}$



16. Impuestos. En la gráfica del margen puedes observar el comportamiento de un impuesto regresivo, según el cual el porcentaje pagado sobre los ingresos totales disminuye a medida que estos aumentan. Justifica si dicho comportamiento se ajusta a una función de proporcionalidad inversa y, en caso afirmativo, halla la constante de proporcionalidad inversa.

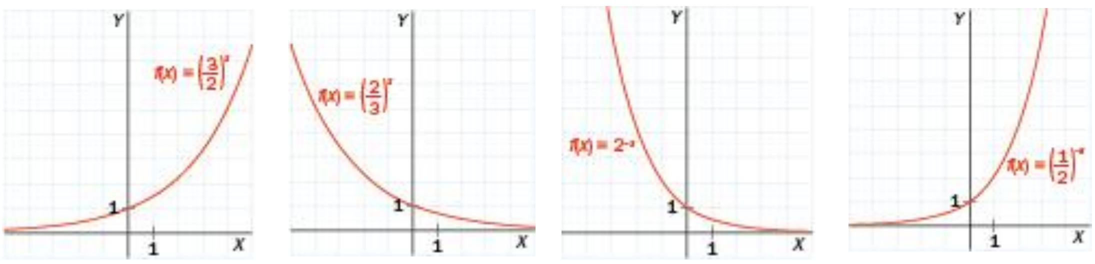


Se trata de una función de proporcionalidad inversa decreciente.

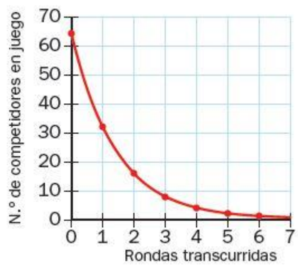
10 La función exponencial

17. Representa las siguientes funciones exponenciales.

a) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ **b)** $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **c)** $f(x) = 2^{-x}$ **d)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$



18. La gráfica de la derecha muestra el número de equipos en juego que quedan en cierta competición a medida que estos se enfrentan por parejas y el ganador de cada partido pasa a la siguiente ronda. Razona si este proceso de eliminación obedece una función exponencial decreciente y halla la base, *b,* de la misma. Si al comienzo de la competición hay 64 equipos, ¿cuántas rondas serán necesarias hasta que sólo quede un equipo como vencedor?

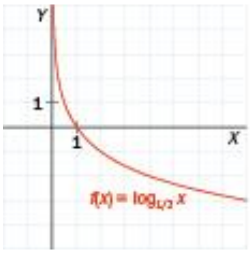


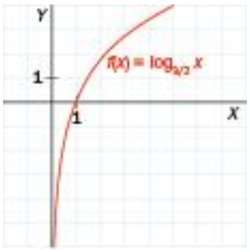
Serán necesarias 6 rondas.

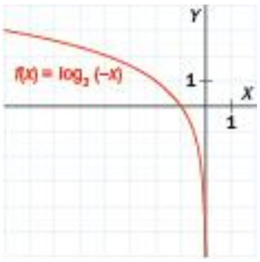
11 La función logarítmica

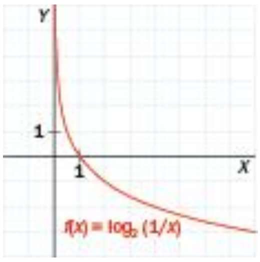
19. Representa las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x)=\log_{1/2} x$ **b)** $f(x)=\log_{3/2} x$ **c)** $f(x)=\log_2(-x)$ **d)** $f(x)=\log_2(1/x)$









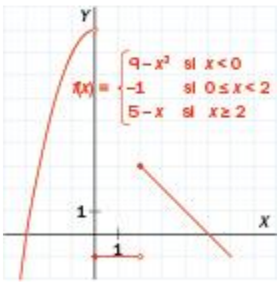
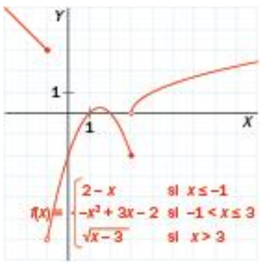
20. Busca información acerca de situaciones en las cuales resulta conveniente emplear escalas logarítmicas y defínelas, en cada caso, mediante una función logarítmica adecuada.

Respuesta libre.

12 Funciones definidas a trozos

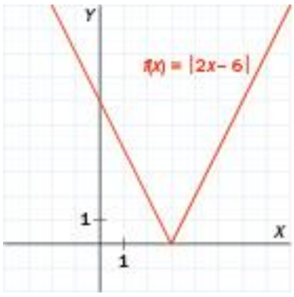
21. Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ -1 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ 5-x & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+3x-2 & \text{si} \quad -1<x\le 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

22. Representa la función $f(x)=|2x-6|$, teniendo en cuenta que esta es, en realidad, la función definida a trozos:

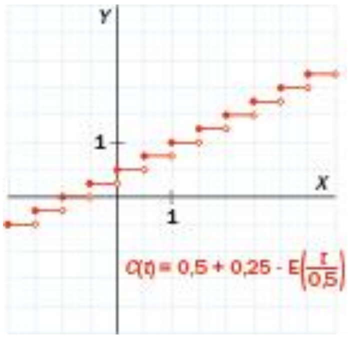
$$f(x)=|2x-6|=\begin{cases}-(2x-6)=-2x+6 & \text{si} \quad x<3\\ 2x-6 & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$$



23. Tarifas de un aparcamiento. El estacionamiento regulado de vehículos dentro del casco histórico de cierta población tiene una tarifa de 50 céntimos por la primera media hora más 25 céntimos por cada media hora extra o fracción de la misma. Expresa como una función definida a trozos el coste del estacionamiento según tiempo transcurrido y realiza su representación gráfica.

$$C(t)=\begin{cases}0,50 & \text{si} \quad 0\leq t<0,5\\ 0,50+0,25\cdot 1 & \text{si} \quad 0,5\leq t<1\\ 0,50+0,25\cdot 2 & \text{si} \quad 1\leq t<1,5 \Rightarrow\\ 0,50+0,25\cdot 3 & \text{si} \quad 1,5\leq t<2\\ \dots & \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(t)=0,5+0,25\cdot \mathrm{E}\left(\frac{t}{0,5}\right)$$



13 Operaciones con funciones

24. Con las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=\sqrt{1-x}$ realiza las siguientes operaciones y halla los dominios de las funciones que obtengas como resultado:

a) $f+g$ **b)** $f-g$ **c)** $f\cdot g$ **d)** $\frac{f}{g}$

e) $\frac{g}{f}$ **f)** g^2 **g)** $f\circ g$ **h)** $g\circ f$

a) $(f+g)(x)=x^2-4+\sqrt{1-x} \quad \Rightarrow \quad D(f+g)=D(f)\cap D(g)=\square\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

b) $(f-g)(x)=x^2-4-\sqrt{1-x} \quad \Rightarrow \quad D(f-g)=D(f)\cap D(g)=\square\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

c) $(f\cdot g)(x)=(x^2-4)\cdot\sqrt{1-x}=x^2\sqrt{1-x}-4\sqrt{1-x} \quad \Rightarrow \quad D(f-g)=D(f)\cap D(g)=\square\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-x}} \quad\Rightarrow\quad D\left(\dfrac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x|\,g(x)=0\}=\mathbb{R}\cap(-\infty,1]-\{1\}=(-\infty,1]-\{1\}=(-\infty,1)$

e) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4} \quad\Rightarrow\quad D\left(\dfrac{g}{f}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x|\,f(x)=0\}=\mathbb{R}\cap(-\infty,1]-\{\pm 2\}=(-\infty,1]-\{\pm 2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,1]$

f) $\left(g^2\right)(x)=(g\cdot g)(x)=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}=1-x \quad\Rightarrow\quad D\left(g^2\right)=D(g)\cap D(g)=(-\infty,1]\cap(-\infty,1]=(-\infty,1]$

g) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\left(\sqrt{1-x}\right)^2-4=1-x-4=-3-x=-(x+3) \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad D(f\circ g)=\{x\in D(g)\,|\,g(x)\in D(f)\}=\left\{x\in[-\infty,1)\,|\,\sqrt{1-x}\in\mathbb{R}\right\}=(-\infty,1]$

h) $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=\sqrt{1-\left(x^2-4\right)}=\sqrt{1-x^2+4}=\sqrt{5-x^2} \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad D(g\circ f)=\{x\in D(f)\,|\,f(x)\in D(g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-4\le 1\right\}=\left[-\sqrt{5},+\sqrt{5}\right]$

25. ¿Cómo y con qué operaciones expresarías estas funciones?

a) El beneficio, *B*, a partir del coste, *C*, y los ingresos, *I*, en la fabricación y venta de *x* unidades.

b) La velocidad de conexión a una red, *v*, en función del tiempo, *t*, a partir de la velocidad según el número de equipos conectados, *n*, y de este en función del tiempo.

a) $B(x)=(I-C)(x)=I(x)-C(x)$

b) $(v\circ n)(t)=v[n(t)]$

14 Transformación de funciones

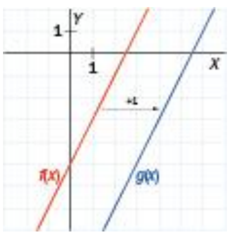
26. Realiza estas traslaciones y representa las gráficas:

a) $f(x)=2x-5$ dos unidades hacia arriba y tres a la derecha.

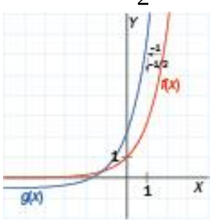
b) $f(x)=e^x$ media unidad hacia abajo y una a la izquierda.

c) $f(x)=\log x$ una unidad hacia abajo y dos a la derecha.

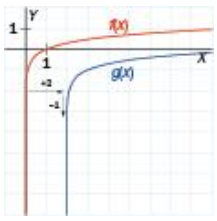
a) $g(x)=2x-9$



b) $g(x)=e^{x+1}-\dfrac{1}{2}$



c) $g(x)=\log(x-2)-1$



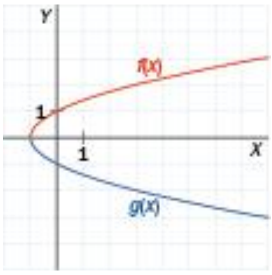
27. Realiza estas transformaciones y representa las gráficas:

a) La simétrica de $f(x)=\sqrt{x+1}$ con respecto al eje OX.

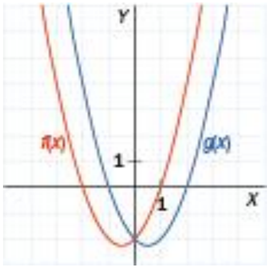
b) La simétrica de $f(x)=x^2+x-2$ con respecto al eje OY.

c) $f(x)=3x+5$ dilatada horizontalmente en un factor dos.

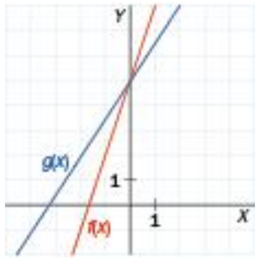
a) $g(x)=-\sqrt{x+1}$



b) $g(x)=x^2-x-2$



c) $g(x)=\frac{3}{2}x+5$



15 La función inversa

28. Para cada una de estas funciones, obtén su inversa y comprueba que $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$:

a) $f(x)=5-3x$ **c)** $f(x)=2x^3$ **e)** $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$ **g)** $f(x)=\frac{1}{x-1}$ **i)** $f(x)=e^{5-x}$

b) $\underset{(x\geq 0)}{f(x)=x^2-1}$ **d)** $f(x)=\sqrt{2x+1}$ **f)** $f(x)=\frac{2}{3x}$ **h)** $f(x)=\frac{1}{x^2}$ **j)** $f(x)=\log(3x+4)$

a) $f^{-1}(x)=\frac{5-x}{3}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}[f(x)]=\frac{5-(5-3x)}{3}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=5-3\left(\frac{5-x}{3}\right)=x$$

b) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}[f(x)]=\sqrt{(x^2-1)+1}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1=x$$

c) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}[f(x)]=\sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=2\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)^3=x$$

d) $f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-1}{2}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\sqrt{2\left(\frac{x^2-1}{2}\right)+1}=x$$

e) $f^{-1}(x)=x^3-2$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3-2=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\sqrt[3]{\left(x^3-2\right)+2}=x$$

f) $f^{-1}(x)=\dfrac{2}{3x}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{2}{3\left(\frac{2}{3x}\right)}=x$$

g) $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}+1$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{1}{\left(\frac{1}{x-1}\right)}+1=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)-1}=x$$

h) $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2}=x$$

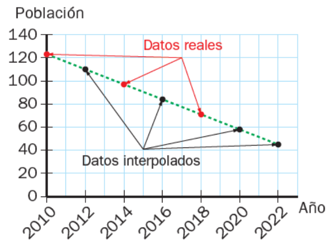
i) $f^{-1}(x)=5-\log x$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=5-\log\left(e^{5-x}\right)=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=e^{5-(5-\log x)}=x$$

j) $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-4}{3}$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left[f(x)\right]=\frac{e^{\left[\log(3x+4)\right]}-4}{3}=x \qquad \left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=\log\left[3\left(\frac{e^x-4}{3}\right)+4\right]=x$$

29. Estudio poblacional. Estima el número de habitantes que tenía la localidad a la que se refiere la tabla en 2012 y en 2016. ¿Qué población tendrá en 2020? ¿Y en 2022?

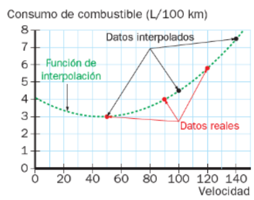


Año	2010	2014	2018
Población	123	97	71

Estimamos que la población de dicha localidad en 2012 y 2016 era, respectivamente, de 110 y 84 habitantes (valores interpolados), y que en 2020 y 2022 será de 58 y 45 habitantes, respectivamente (valores extrapolados).

30. Consumo. La siguiente tabla recoge el consumo de combustible de cierto vehículo en función de la velocidad a la que circula. ¿Cuál será el consumo a 100 km/h? ¿Y a 140 km/h?

Velocidad (km/h)	50	90	120
Consumo de combustible (L/100 km)	3,0	4,0	5,8

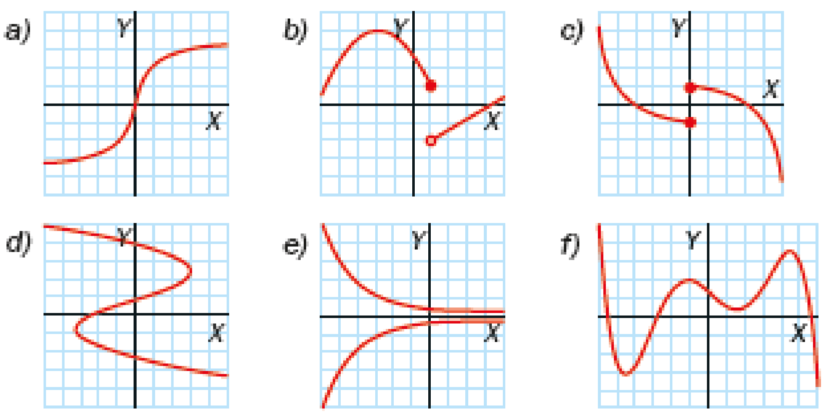


Se espera que el consumo del vehículo ascienda a 4,5 L/100 km a una velocidad de 100 km/h (valor interpolado), y a 7,5 L/100 km a una velocidad de 140 km/h (valor extrapolado).

Actividades finales

La función y sus características

31. Justifica cuáles de estas gráficas pertenecen a una función:



Pertenecen a funciones las gráficas a), c) y f).

32. Escribe una expresión analítica para estas funciones:

a) El volumen ocupado por un gas es directamente proporcional a su temperatura.

b) La resistencia aerodinámica total que sufre un avión en vuelo aumenta con el cuadrado de su velocidad.

c) La cantidad demandada de un producto es inversamente proporcional al precio del mismo.

d) La sensación provocada por la percepción de un estímulo físico depende de la raíz cúbica de su intensidad.

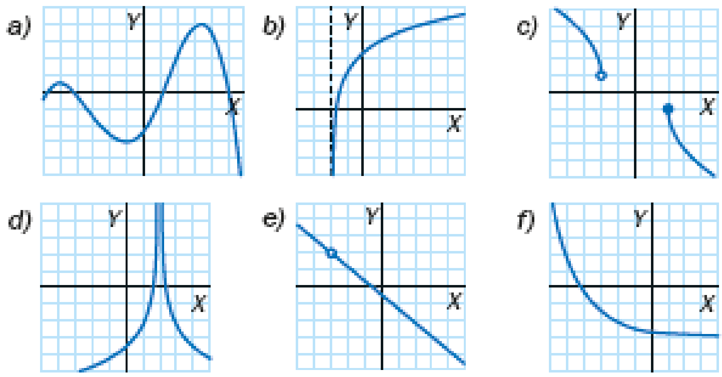
a) $V(T) = kT$, con $k = \text{cte.}$

b) $R(v) = kv^2$, con $k = \text{cte.}$

c) $Q(p) = \dfrac{k}{p}$, con $k = \text{cte.}$

d) $S(I) = k\sqrt[3]{I}$, con $k = \text{cte.}$

33. ¿Qué dominio y recorrido tienen estas funciones?



a) $D(f) = \mathbb{R}$ y $R(f) = (-\infty, 4]$

b) $D(f) = (-2, \infty)$ y $R(f) = \mathbb{R}$

c) $D(f) = (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ y $R(f) = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

d) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $R(f) = \mathbb{R}$

e) $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ y $R(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

f) $D(f) = \mathbb{R}$ y $R(f) = (-3, \infty)$

34. Obtén el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+4}$

d) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2 - 5x + 6}$

e) $f(x) = \sqrt{2x+6} + \sqrt{6-2x}$

f) $f(x) = \sqrt{(2-3x)(4x-5)}$

g) $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 2x + 15}}{x^2 - 4}$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x}}$

k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

l) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{(x-3)(2-x)}}$

m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2 - 4}}$

n) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{-x^2 + 5x - 6}}$

a) Excluimos del dominio los puntos que anulan los denominadores.

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$.

c) $D(f)=\mathbb{R}$.

d) $D(f)=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

e) $D(f)=[-3,3]$

f) $D(f)=\left[\frac{2}{3},\frac{5}{4}\right]$

g) $D(f)=[-3,1]$

h) $D(f)=\mathbb{R}$.

i) $D(f)=[-3,5]-\{\pm 2\}$

j) $D(f)=[-1,0)\cup[1,\infty)$.

k) $D(f)=(-\infty,-2]\cup(3,\infty)$.

l) $D(f)=(2,3)$

m) $D(f)=(-2,-1]\cup(2,\infty)$.

n) $D(f)=(-\infty,-1]\cup(2,3)$.

35. Halla el dominio de estas funciones:

a) $f(x)=xe^{-x^2}$

b) $f(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$

d) $f(x)=\log\left(\dfrac{2x+6}{5-x}\right)$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\log(3x+4)}$

f) $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{1-x}}$

g) $f(x)=\sqrt{|x|}$

h) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

i) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<1\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x\leq -1\\ \sqrt{x-1} & \text{si } x>-1\end{cases}$

a) $D(f)=\mathbb{R}$.

b) $D(f)=(0,\infty)$.

c) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

d) $D(f)=(-3,5)$

e) $D(f)=\left(-\frac{4}{3},\infty\right)-\{-1\}$.

f) $D(f)=(-1,1)$.

g) $D(f)=\mathbb{R}$.

h) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

i) $D(f)=[0,\infty)$

j) $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup[1,\infty)$

k) $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

l) $D(f)=(-\infty,-1)\cup[1,\infty)$

36. Halla los puntos de corte con los ejes de cada una de estas funciones:

a) $f(x)=\dfrac{5-4x}{2}$

b) $f(x)=x^2+4x+3$

c) $f(x)=-x^3-2x^2+x+2$

d) $f(x)=\dfrac{3x-2}{5-x}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}+1$

f) $f(x)=\sqrt{4x^2-3}$

g) $f(x)=1-3^{2-x}$

h) $f(x)=\log_2\dfrac{2x-1}{x-8}$

i) $f(x)=x\log(x+2)$

j) $f(x)=(x-1)e^{-x^2}$

a) $OX:\left(\dfrac{5}{4},0\right)$; $OY:\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$

b) $OX:(-3,0),(-1,0)$; $OY:(0,3)$

c) $OX:(-2,0),(\pm1,0)$; $OY:(0,2)$

d) $OX:\left(\dfrac{2}{3},0\right)$; $OY:\left(0,-\dfrac{2}{5}\right)$

e) *OX:* la función carece de puntos de corte con el eje de abscisas. $OY:(0,1)$

f) $OX:\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$; *OY:* la función carece de punto de corte con el eje de ordenadas.

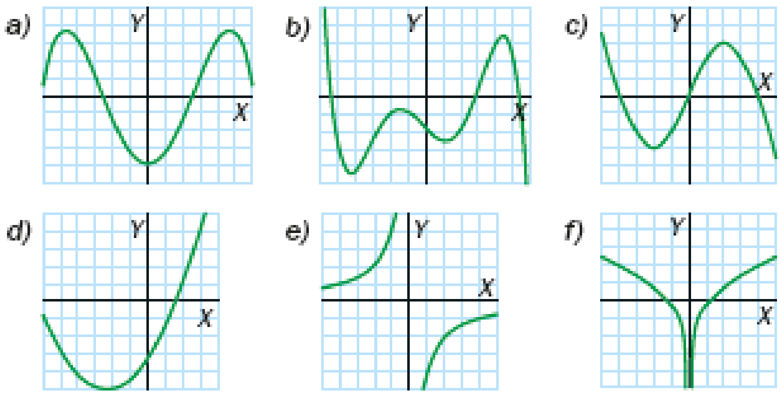
g) $OX:(2,0)$; $OY:(0,-8)$

h) $OX:(-7,0)$; $OY:(0,-3)$

i) $OX:(1,0)$; $OY:(0,-1)$

j) $OX:(0,0),(-1,0)$; $OY:(0,0)$

37. Observa las siguientes gráficas y determina si las funciones a las que representan poseen o no alguna simetría:



a) función par .

b) no es par ni impar .

c) función impar .

d) no es par ni impar .

e) función impar .

f) función par

38. Determina la simetría de estas funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = e^{-x^2}$

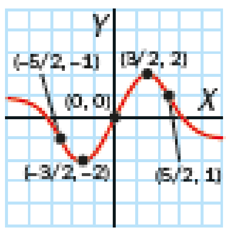
a) función impar.

b) función par.

c) función par.

39. Analiza el crecimiento, curvatura y acotación de la función f(x) a partir de su representación gráfica. ¿Aprecias en ella alguna simetría?

Es una función impar.



40. Comprueba si estas funciones poseen alguna simetría:

a) $f(x)=x^4-3x^2+6$
b) $f(x)=3x-2x^3$
c) $f(x)=-x^2+7x-3$
d) $f(x)=\dfrac{-x}{x^3-5x}$
e) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x}$
f) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$
g) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
h) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$
i) $f(x)=x\,e^{-x^2}$
j) $f(x)=x\,e^{|x|}$
k) $f(x)=\log(x^2+1)$
l) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

a) función par.

b) función impar.

c) Esta función no es par ni impar.

d) función par.

e) función impar.

f) Esta función no es par ni impar.

g) función par.

h) función par.

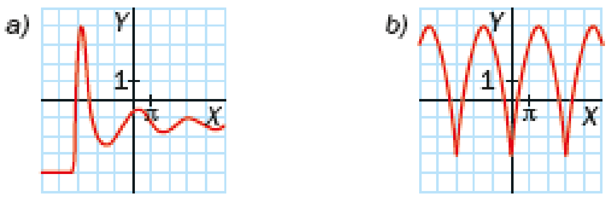
i) función impar.

j) función impar.

k) función par.

l) función impar.

41. ¿Son periódicas las siguientes funciones? En caso afirmativo, ¿cuál es su periodo?



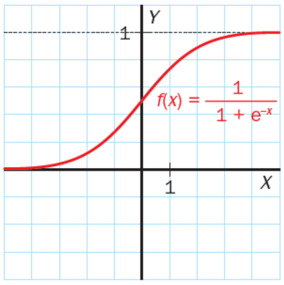
a) No es una función periódica.

b) Es una función periódica de periodo $T=3\pi$.

42. Esboza la gráfica de la función *logística* o *sigmoide,* definida por la expresión:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido? ¿Posee alguna simetría?



Funciones elementales

43. Obtén la expresión analítica de estas funciones polinómicas de primer y segundo grado:

a) La recta que pasa por los puntos (2,-3) y (-4,1).
b) La recta de pendiente *m* = -4 que pasa por el punto (-1,5).
c) La parábola cuyos puntos de corte con los ejes son (-2,0), (3,0) y (0,6).
d) La parábola que corta al eje *OY* en (0,-2) y con vértice en el punto (1,-1).

a) La expresión analítica de esta función es $f(x)=-\frac{4x+7}{5}$.

b) La expresión analítica de la función es $f(x)=-4x+1$.

c) La expresión analítica de esta función cuadrática es: $f(x)=-x^2+x+6$.

d) La expresión analítica de esta función cuadrática es: $f(x)=-x^2+2x-2$.

44. Halla la función de interpolación polinómica de primer grado que pasa por los puntos (-2,0) y (1,5). Calcula su valor en *x* = 3 mediante una extrapolación lineal.

La expresión analítica de la función de interpolación polinómica de primer grado resulta ser: $f(x)=\frac{5x+10}{3}$ cuyo valor extrapolado en *x* = 3 es: $f(3)=\frac{25}{3}$

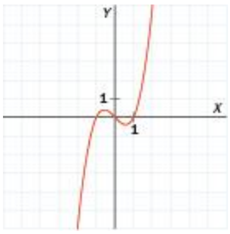
45. Obtén la función de interpolación polinómica de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1), (1, −3) y (4, 5). Halla su valor en x = 2 mediante una interpolación cuadrática.

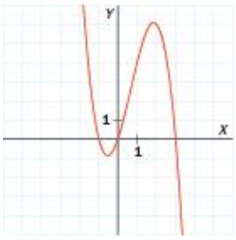
La expresión analítica de la función de interpolación polinómica de segundo grado es: $f(x)=\frac{5}{3}x^2-\frac{17}{3}x+1$ cuyo valor interpolado en x = 2 es: $f(2)=-\frac{11}{3}$

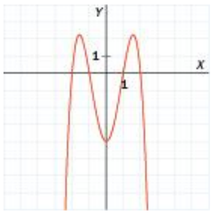
46. Considera los puntos de corte con los ejes y sus propiedades generales, esboza la gráfica de estas cuatro funciones polinómicas:

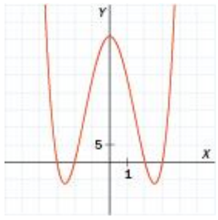
a) $f(x)=x^3-x$ **b)** $f(x)=-x^3+2x^2+3x$

c) $f(x)=-x^4+5x^2-4$ **d)** $f(x)=x^4-13x^2+36$





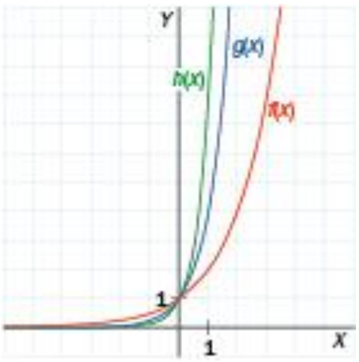




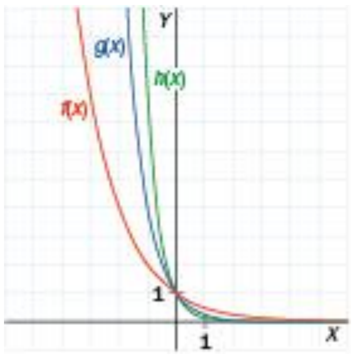
47. Representa las funciones exponenciales de cada apartado sobre unos mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo se comportan según el valor de la base?

a) $f(x)=2^x$ $g(x)=4^x$ $h(x)=8^x$ **b)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ $h(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x$

a)



b)



48. Esboza la gráfica de las siguientes funciones hallando sus puntos de corte con los ejes y evaluando algunos otros puntos de sus correspondientes dominios. ¿Poseen alguna simetría?

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **e)** $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{-x}}$

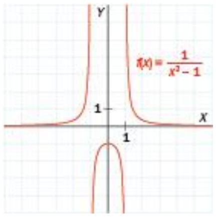
b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **f)** $f(x)=\log x^2$

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$OX:$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY:(0,-1)$

Posee simetría par.

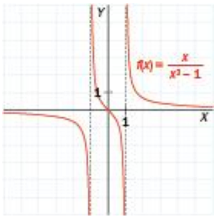


b) $D(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$OX:(0,0)$

$OY:(0,0)$

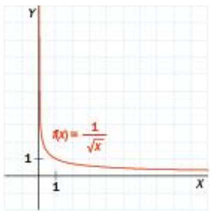
posee simetría impar.



c) $D(f)=(0,\infty)$

$OX:$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY:$ no tiene punto de corte con el eje de ordenadas.

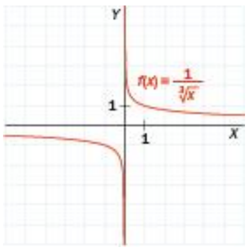


d) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$OX:$ no tiene puntos de corte con el eje de absci sas.

$OY:$ no tiene punto de corte con el eje de ordenadas.

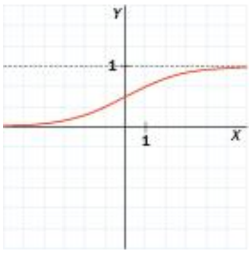
posee simetría impar.



e) $D(f)=\mathbb{R}$

$OX:$ no tiene puntos de corte con el eje de abscisas.

$OY:\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ no posee simetría par ni impar.

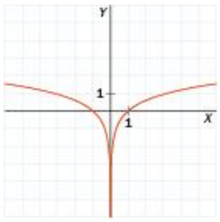


f) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

$OX:(\pm 1,0)$

$OY:$ no tiene punto de corte con el eje de ordenadas.

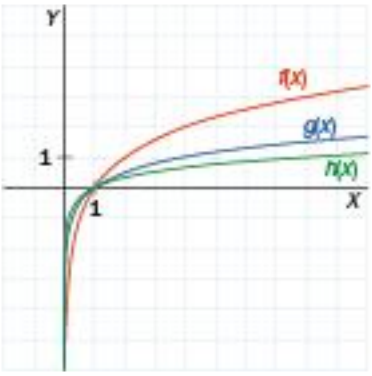
posee simetría par.



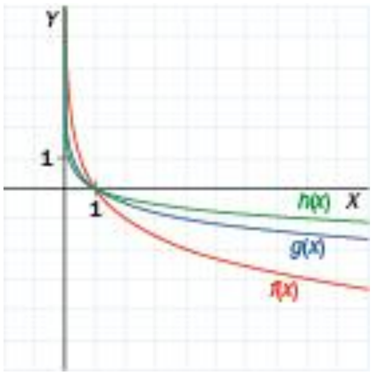
49. Representa las funciones logarítmicas de cada apartado sobre unos mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo se comportan según el valor de la base?

a) $f(x)=\log_2 x$ $\quad g(x)=\log_4 x$ $\quad h(x)=\log_8 x$ $\qquad$ **b)** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ $\quad g(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$ $\quad h(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$

a)



b)



50. Representa estas funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si } x<1 \\ 2x-1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<-1 \\ x+1 & \text{si } -1\leq x<1 \\ -2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

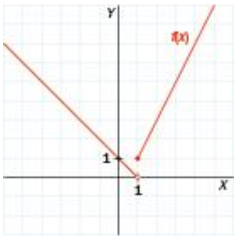
c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{si } x\leq -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1<x\leq 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

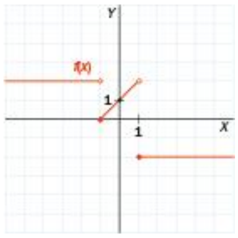
e) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\leq 0 \\ \log x & \text{si } x>0 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -e^{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

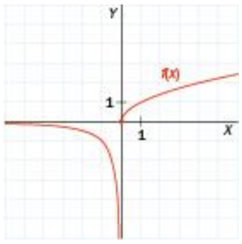
a)



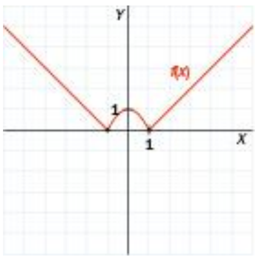
b)



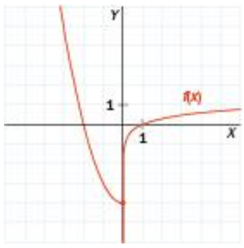
c)



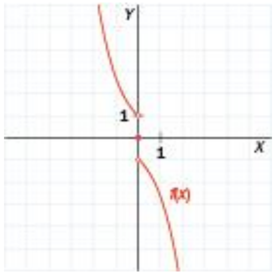
d)



e)



f)



51. Expresa estas funciones como funciones definidas a trozos y representa sus gráficas:

a) $f(x)=|2x+1|-|2x-1|$

b) $f(x)=|x-1|+|2-x|$

c) $f(x)=|x^2+x-6|$

d) $f(x)=4|x|-x^2$

e) $f(x)=\sqrt{|x-2|}$

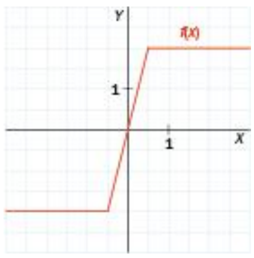
f) $f(x)=e^{|1-x|}$

g) $f(x)=|x|e^{-x^2}$

h) $f(x)=\log|x+3|$

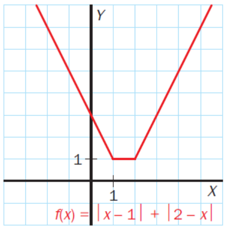
a)

$$f(x)=|2x+1|-|2x-1|=\begin{cases} -(2x+1)+(2x-1)=-2 & \text{si } x<-\dfrac{1}{2} \\ (2x+1)+(2x-1)=4x & \text{si } -\dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{1}{2} \\ (2x+1)-(2x-1)=\ 2 & \text{si } x\geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



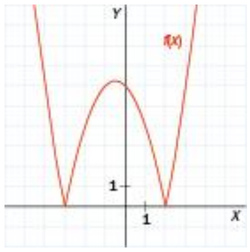
b)

$$f(x)=|x-1|+|2-x|=\begin{cases}-(x-1)+(2-x)=-2x+3 & \text{si } x<1\\ (x-1)+(2-x)=1 & \text{si } 1\le x\le 2\\ (x-1)-(2-x)=2x-3 & \text{si } x>2\end{cases}$$



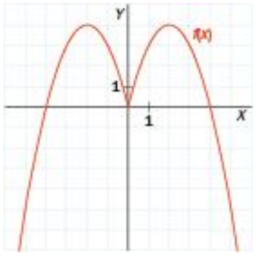
c)

$$f(x)=|x^2+x-6|=\begin{cases}x^2+x-6 & \text{si } x<-3\\ -x^2-x+6 & \text{si } -3\le x<2\\ x^2+x-6 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$



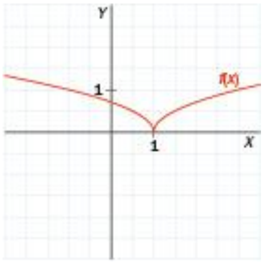
d)

$$f(x)=4|x|-x^2=\begin{cases}-4x-x^2 & \text{si } x<0\\ 4x-x^2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$



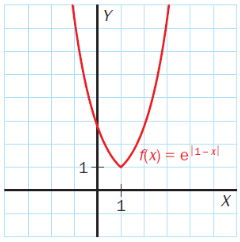
e)

$$f(x)=\sqrt{|x-2|}=\begin{cases}\sqrt{2-x} & \text{si } x<2\\ \sqrt{x-2} & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$



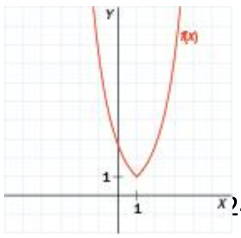
f)

$$f(x)=e^{|1-x|}=\begin{cases}e^{1-x} & \text{si } x\le 1\\ e^{x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$$



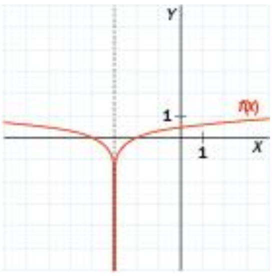
g)

$$f(x)=e^{|1-x|}=\begin{cases}e^{1-x} & \text{si } x\le 1\\ e^{x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$$



h)

$$f(x)=\log|x+3|=\begin{cases}\log(-x-3) & \text{si } x<-3\\ \log(x+3) & \text{si } x>-3\end{cases}$$



52. La función signo, $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, hace corresponder cada número real *x* con su signo: positivo (+1), negativo (-1) o nulo (0) en el caso del número cero.

a) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función signo?

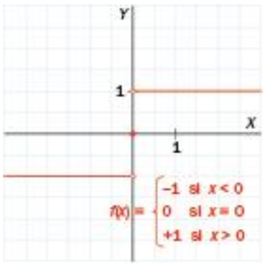
b) Escribe esta función como una función definida a trozos y dibuja su gráfica. ¿Posee alguna simetría?

c) Busca una forma de expresar la función signo a partir de la función valor absoluto.

a) $D(f)=\mathbb{R}$; $R(f)=\{-1,0,+1\}$.

b)

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ +1 & \text{si } x>0\end{cases}$$



Es una función impar, pues: $f(-x)=\operatorname{sgn}(-x)=-\operatorname{sgn}(x)=-f(x)$.

c)

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Operaciones y transformaciones

53. Considera las funciones:

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \qquad g(x)=\frac{x-1}{2x}$$

Realiza las operaciones que se piden a continuación y halla los dominios de las funciones que resultan de ellas:

a) $f+g$ **b)** $g-f$ **c)** $f\cdot g$ **d)** f/g **e)** g/f **f)** $f\circ g$ **g)** $g\circ f$

Los dominios de estas dos funciones racionales son:
$D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$ y $D(g)=\mathbb{R}-\{0\}$.

a) $(f+g)(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2+2x}$ $D(f+g)=\mathbb{R}-\{-1,0\}$

b) $(f-g)(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{2x^2+2x}$ $D(f-g)=\mathbb{R}-\{-1,0\}$

c) $(f\cdot g)(x)=\dfrac{x-1}{2x^2+2x}$ $D(f\cdot g)=\mathbb{R}-\{-1,0\}$

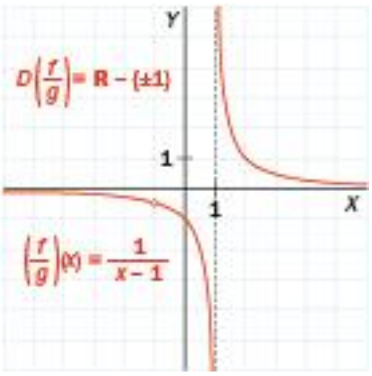
d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ $D\left(\dfrac{f}{g}\right)=\mathbb{R}-\{0,\pm1\}$

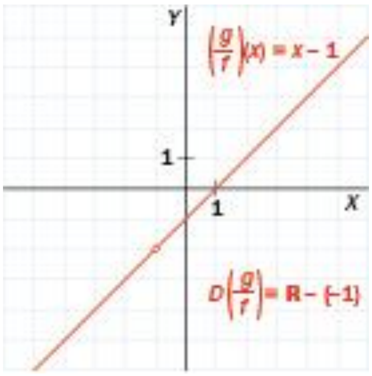
e) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$ $D\left(\dfrac{g}{f}\right)=\mathbb{R}-\{-1,0\}$

f) $(f\circ g)(x)=\dfrac{2x}{3x-1}$ $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{3}\right\}$

g) $(g\circ f)(x)=-\dfrac{x}{2}$ $D(g\circ f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

54. Dadas las funciones $f(x)=x+1$ y $g(x)=x^2-1$ define las funciones *f*/*g* y *g*/*f*. Obtén sus respectivos dominios y represéntalas gráficamente.





Estas dos funciones polinómicas tienen como dominio toda la recta real: $D(f)=\mathbb{R}$ y $D(g)=\mathbb{R}$

Las funciones que se obtienen de las operaciones pedidas y sus dominios correspondientes son:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $D\left(\dfrac{f}{g}\right)=\mathbb{R}-\{\pm1\}$, pues $g(x)=0\Rightarrow x=\pm1$.

$\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=x-1$ $D\left(\dfrac{g}{f}\right)=\mathbb{R}-\{-1\}$, pues $f(x)=0\Rightarrow x=-1$.

55. Dadas las funciones $f(x)=3-2x$ y $g(x)=\sqrt{5-x}$, comprueba que $f\circ g\neq g\circ f$. ¿Cuál es el dominio de las funciones obtenidas?

$(f\circ g)(x)=3-2\sqrt{5-x}\qquad D(f\circ g)=(-\infty,5]$

$(g\circ f)(x)=\sqrt{2(x+1)}\qquad D(g\circ f)=[-1,\infty)$.

56. Con las funciones $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, define $f\circ g$ y $g\circ f$. ¿Qué dominio poseen las funciones resultantes?

$(f\circ g)(x)=\sqrt{\dfrac{2-x^2}{1-x^2}}\qquad D(f\circ g)=\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup(-1,1)\cup\left[\sqrt{2},\infty\right)$

$(g\circ f)(x)=-\dfrac{1}{x}\qquad D(g\circ f)=[-1,0)\cup(0,\infty)$

57. Halla $f\circ g$ y $g\circ f$. Siendo $f(x)=2x^2-3x+1$ y $g(x)=5$,

$(f\circ g)(x)=36$

$(g\circ f)(x)=5$

58. Dadas las funciones $f(x)=4x+5$, $g(x)=\sqrt{2x}$ y $h(x)=e^{-x^2}$, realiza la operación $h\circ g\circ f=h[g[f(x)]]$.

$(h\circ g\circ f)(x)=e^{-(8x+10)}$

59. Escribe las funciones como composición de otras más sencillas:

a) $f(x)=(3x-4)^2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$

c) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

d) $f(x)=e^{x^2+1}$

e) $f(x)=e^{2x}-e^x+1$

f) $f(x)=\log\left(3x^2+2x-5\right)$

g) $f(x)=\left|x^2-9\right|$

h) $f(x)=\operatorname{sen}(4x+3)$

i) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x+1}$

j) $f(x)=\cos^2(1-x)$

a) Si $g(x)=x^2$ y $h(x)=3x-4$, entonces $f(x)=(g\circ h)(x)=g[h(x)]=[h(x)]^2=(3x-4)^2$.

b) Si $g(x)=\dfrac{1}{x}$ y $h(x)=x^2+3$, entonces $f(x)=(g\circ h)(x)=g[h(x)]=\dfrac{1}{h(x)}=\dfrac{1}{x^2+3}$.

c) Si $g(x)=\sqrt{x}$ y $h(x)=2x-1$, entonces $f(x)=(g\circ h)(x)=g[h(x)]=\sqrt{h(x)}=\sqrt{2x-1}$.

d) Si $g(x)=e^x$ y $h(x)=x^2+1$, entonces $f(x)=(g\circ h)(x)=g\left[h(x)\right]=e^{h(x)}=e^{x^2+1}$.

e) Si $g(x)=e^x$, $h(x)=\sqrt{x}$ y $m(x)=x+2$, entonces

$f(x)=(g\circ h\circ m)=g\left[h\left[m(x)\right]\right]=e^{h[m(x)]}=e^{\sqrt{m(x)}}=e^{\sqrt{x+2}}$.

f) Si $g(x)=x^2-x+1$ y $h(x)=e^x$, entonces

$f(x)=(g\circ h)(x)=g\left[h(x)\right]=\left[h(x)\right]^2-h(x)+1=\left(e^x\right)^2-e^x+1=e^{2x}-e^x+1$.

g) Si $g(x)=\log x$ y $h(x)=3x^2+2x-5$, entonces

$f(x)=(g\circ h)(x)=g\left[h(x)\right]=\log\left[h(x)\right]=\log\left(3x^2+2x-5\right)$.

h) Si $g(x)=|x|$ y $h(x)=x^2-9$, entonces $f(x)=(g\circ h)(x)=g\left[h(x)\right]=|h(x)|=|x^2-9|$.

60. A partir de las funciones construye las siguientes funciones:

$$f(x)=5-x \qquad g(x)=\sqrt{x-2} \qquad h(x)=\frac{1}{x+3}$$

Construye las siguientes funciones:

a) $(2h-f)\cdot g$

b) $f-\left(g^2/h\right)$

c) $g^2+f\cdot h$

d) f/g

e) $h\cdot(f\circ g)$

f) $(f/h)\circ g$

a) $(2h-f)\cdot g=\dfrac{\left(x^2-2x-13\right)\sqrt{x-2}}{x+3}$

b) $f-\left(g^2/h\right)=-x^2-2x+11$

c) $g^2+f\cdot h=\dfrac{x^2-1}{x+3}$

d) $f/g=\dfrac{(5-x)\sqrt{x-2}}{x-2}$

e) $h\cdot(f\circ g)=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{x+3}$

f) $(f/h)\circ g=17-x+2\sqrt{x-2}$

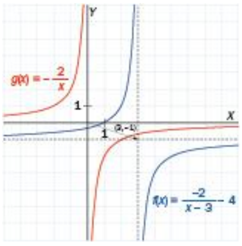
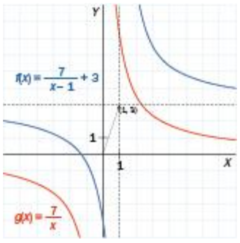
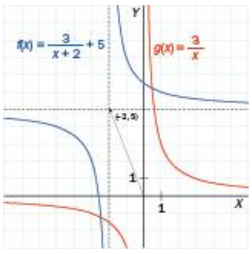
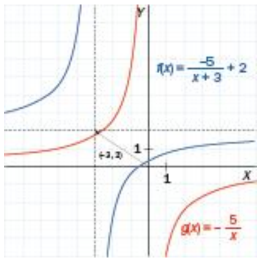
61. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales a partir de la función de proporcionalidad inversa de la cual pueden obtenerse por desplazamientos:

a) $f(x)=\dfrac{-2}{x-3}-4$

b) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x-1}$

c) $f(x)=5+\dfrac{3}{x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$

62. Halla, cuando sea posible, las inversas de estas funciones y comprueba que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$

b) $f(x) = -3x^2 + 4$

c) $f(x) = 2x^3 - 5$

d) $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3$

e) $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$

f) $f(x) = |x-2|$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

h) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

i) $f(x) = 5e^{\frac{x-3}{2}} + 4$

j) $f(x) = \dfrac{4}{3}\log(5-2x)$

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{4-x}{3}}$

c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+5}{2}}$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-(x-3)^2}{2}$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3+5}{2}$

f) $f^{-1}(x) = x+2$

g) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$

h) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x}$

i) $f^{-1}(x) = 3 + 2\log\left(\dfrac{x-4}{5}\right)$

j) $f^{-1}(x) = \dfrac{5-e^{\frac{3}{4}x}}{2}$

63. Mediante transformaciones, representa las funciones:

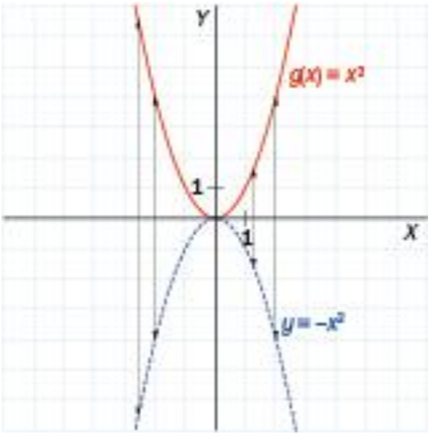
a) $f(x) = -x^2 + 1$ **a partir de** $g(x) = x^2$

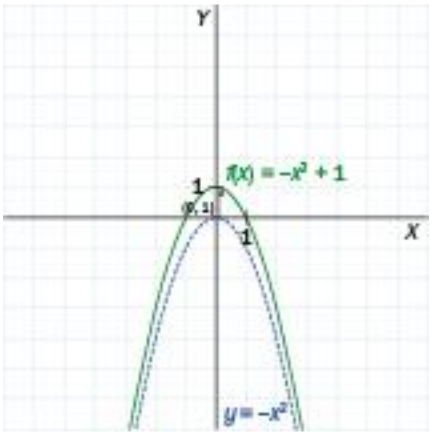
b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$ **a partir de** $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x)=e^{-x}-1$ **a partir de** $g(x)=e^{x}$

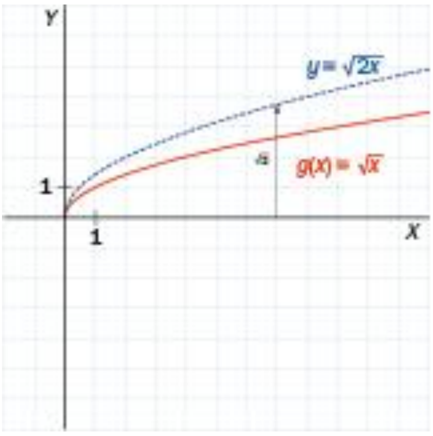
d) $f(x)=\frac{1}{2}\log(x-1)$ **a partir de** $g(x)=\log x$

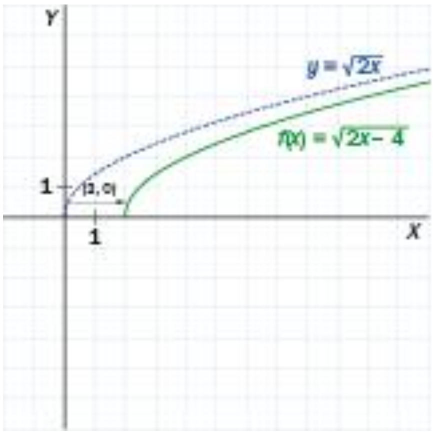
a) $\underset{x^2}{g(x)} \xrightarrow[\text{respecto al eje } OX]{\text{simetría con}} -x^2 \xrightarrow[\text{una unidad hacia arriba}]{\text{traslación vertical de}} \underset{-x^2+1}{f(x)=g(x)+1}$



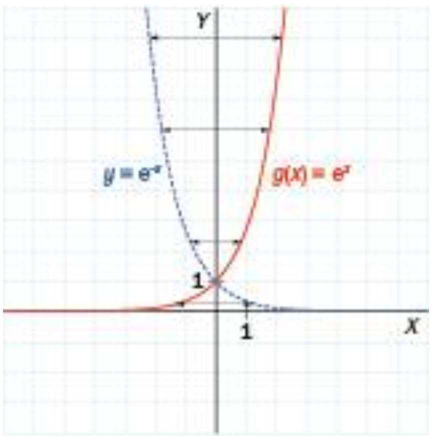


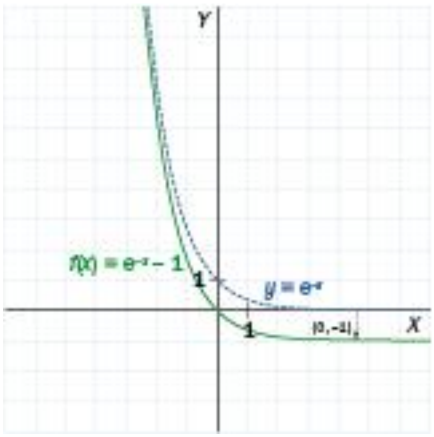
b) $\underset{\sqrt{x}}{g(x)} \xrightarrow[\text{en un factor dos}]{\text{contracción horizontal}} \sqrt{2x} \xrightarrow[\text{dos unidades hacia la derecha}]{\text{traslación horizontal de}} \underset{\sqrt{2(x-2)}\;=\sqrt{2x-4}}{f(x)=g[2(x-2)]}$



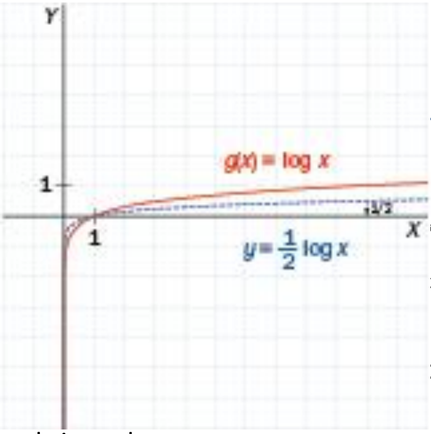


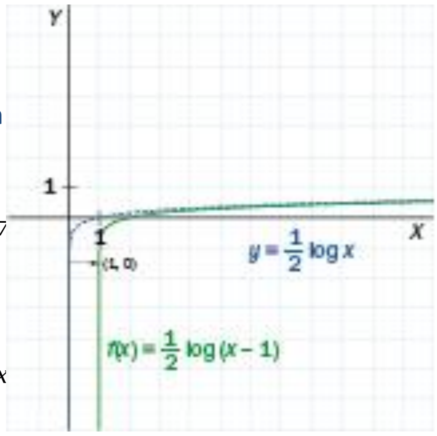
c) $\underset{e^{x}}{g(x)} \xrightarrow[\text{respecto al eje } OY]{\text{simetría con}} e^{-x} \xrightarrow[\text{una unidad hacia abajo}]{\text{traslación vertical de}} \underset{e^{-x}-1}{f(x)=g(-x)-1}$





d) $\underset{g(x)}{\log x} \xrightarrow[\text{en un factor dos}]{\text{contracción vertical}} \dfrac{1}{2}\log x \xrightarrow[\text{una unidad hacia la derecha}]{\text{traslación horizontal de}} \underset{f(x)=\frac{1}{2}g(x-1)}{\dfrac{1}{2}\log(x-1)}$





64. Defi… uales pueden tran…

a) f … $) = 6\sqrt{4-2x} - 7$

b) f … $x) = 1 + \dfrac{e^{6-2x}}{10}$

a) E… ción lineal $g(x$

b) Se obtiene de $g(x) = x^2$

c) Puede obtenerse de la función $g(x) = \sqrt{x}$

d) Esta función exponencial se obtiene de la función $g(x) = e^x$

Aplicaciones

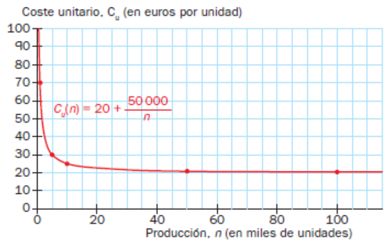
65. **Costes. Una empresa ha estimado que el coste total de producción, *C*, en euros, de *n* unidades de uno de sus productos es:**

$$C(n) = 20n + 50\,000$$

a) **Construye la función coste unitario, $C_u(n)$, definida como el coste por cada unidad fabricada, y represéntala en un margen de producción comprendido entre 1000 y 100 000 unidades.**

b) **¿A qué valor dirías que se aproxima el coste unitario a medida que aumenta la producción? Interpreta el comportamiento de esta función.**

a)



b) Según aumenta la producción y el número de unidades, *n,* crece, se reduce el coste unitario, que tiende poco a poco hacia un valor muy próximo a los 20 euros.

66. **Bolsa.** El valor en bolsa de las acciones de una empresa en tres momentos distintos de cierta jornada figuran en la siguiente tabla. ¿A qué precio podrían venderse a las 13:00 horas?

Tiempo (horas)	10:00	11:00	12:00
Cotización (euros)	43,50	45,90	48,30

Estimamos que el valor en bolsa de las acciones de dicha empresa alcanzará 50,70 euros a las 13:00 horas.

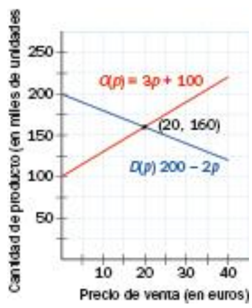
67. Oferta y demanda. Un modelo de mercado determina que la cantidad, en miles de unidades, ofertada, *O*, y demandada, *D*, de cierto producto dependen del precio de venta, *p*, en euros, según:

$$O(p)=3p+100 \qquad D(p)=200-2p$$

a) Representa estas funciones y halla el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda; es decir, el precio de venta para el cual ambas cantidades se igualan.

b) Estudia si habrá escasez o exceso de producto para un precio de venta de 15 euros. ¿Y con 25 euros?

a) Para un precio de venta de 20 euros, la oferta y la demanda están equilibradas, ascendiendo estas a 160 000 unidades.



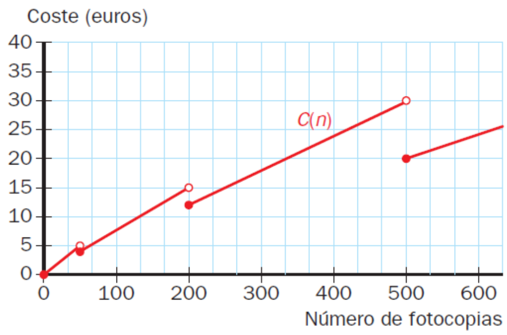
b) Para un precio de venta de 15 euros, hay una escasez de producto, al demandarse más cantidad de la que se oferta; mientras que para un precio de venta de 25 euros, ocurre que dándose ahora un exceso de producto, pues se oferta más cantidad de producto de la que se demanda.

68. Coste. Esta tabla muestra las tarifas de un servicio de reprografía:

Número de fotocopias	Menos de 50	Entre 50 y 200	Entre 200 y 500	A partir de 500
Precio por fotocopia	0,10 €	0,08 €	0,06 €	0,04 €

Expresa el coste según el número de fotocopias realizado como una función definida a trozos y representa su gráfica.

$$C(n)=\begin{cases} 0{,}10n & \text{si} \quad 0\le n<50 \\ 0{,}08n & \text{si} \quad 50\le n<200 \\ 0{,}06n & \text{si} \quad 200\le n<500 \\ 0{,}04n & \text{si} \quad n\ge 500 \end{cases}$$

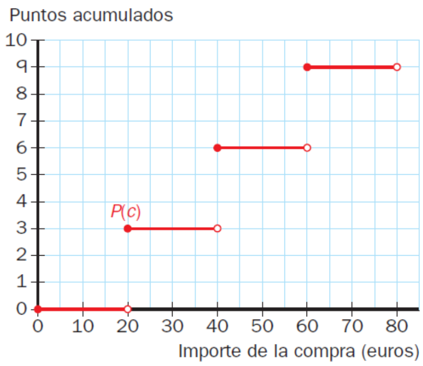


69. Tarjeta. Al utilizar cierta tarjeta de crédito en tus compras obtienes 3 puntos, canjeables por dinero para futuras compras, por cada 20 euros de importe.

a) Expresa los puntos que acumulas según el gasto realizado como una función definida a trozos y represéntala.

a)

$$P(c)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le c < 20 \\ 3 & \text{si} \quad 20 \le c < 40 \\ 6 & \text{si} \quad 40 \le c < 60 \\ 9 & \text{si} \quad 60 \le c < 80 \\ & \dots \end{cases}$$



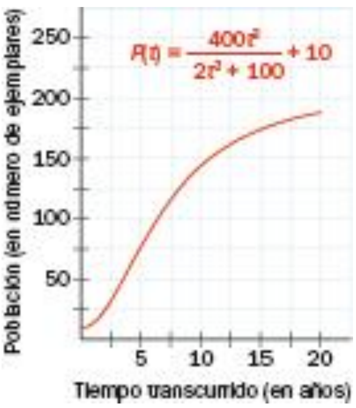
70. Extinción. Para la recuperación una especie en peligro de extinción, se introducen en una reserva natural cinco parejas de la misma. Estudios previos indican que su población, P, evolucionará con el tiempo, t, medido en años, según la función:

$$P(t)=\frac{400t^2}{2t^2+100}+10$$

a) Representa gráficamente la evolución de la población durante los primeros veinte años.

b) ¿Cuánto tiempo será necesario para que la especie alcance, al menos, 100 ejemplares?

a)



b) En algo menos de seis años y medio la población de la especie alcanzará los 100 ejemplares.

71. Virus. En las primeras fases de la aparición de cierto virus informático, el número de ordenadores afectados, que ascendía inicialmente a una docena, se duplica cada medio segundo.

a) Expresa el número de equipos infectados, *N,* en función del tiempo transcurrido, *t,* medido en segundos, mediante una ley exponencial creciente.

b) ¿Cuánto tardará en infectar a un millón de equipos?

a) $N(t) = 12 \cdot 2^{\frac{t}{0,5}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{2t} \Rightarrow N(t) = 3 \cdot 2^{2(t+1)}$

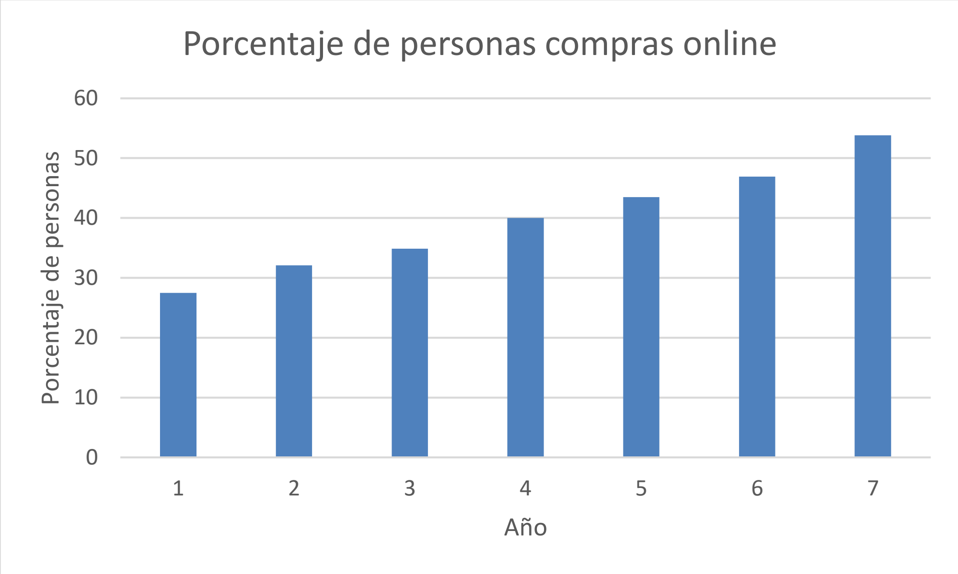
b) En poco más de 8 segundos el virus se habrá propagado a un millón de equipos.

Un mundo matemático

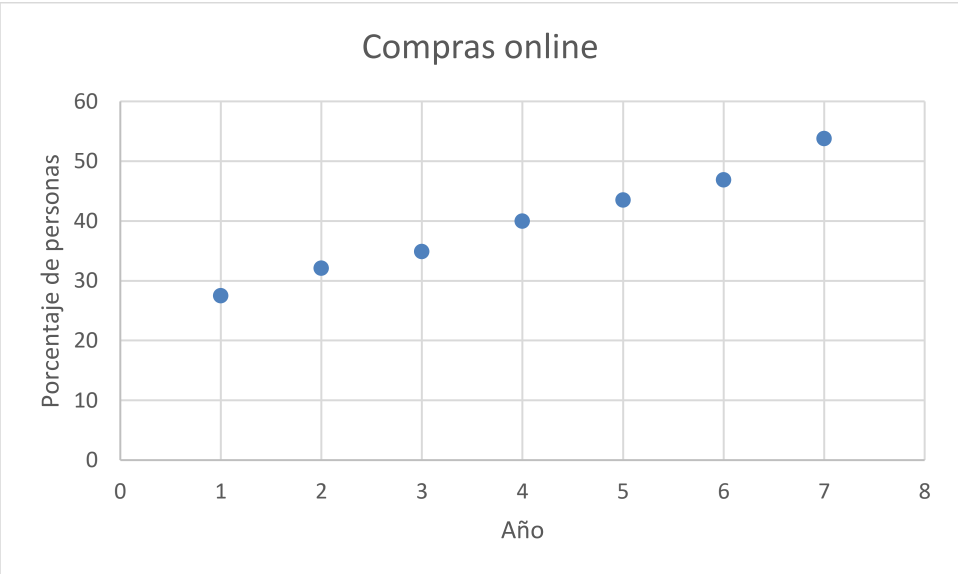
1. Utiliza Excel, GeoGebra u otra hoja de cálculo para dibujar el diagrama de dispersión de los datos, considerando la variable independiente (*x*) el año, y designando 2014 como *x* = 1, 2015 como *x* = 2, …, mientras que la variable dependiente (*y*) representa el porcentaje de personas que compran por Internet.

La tabla con los datos y un gráfico de barras figuran a continuación.

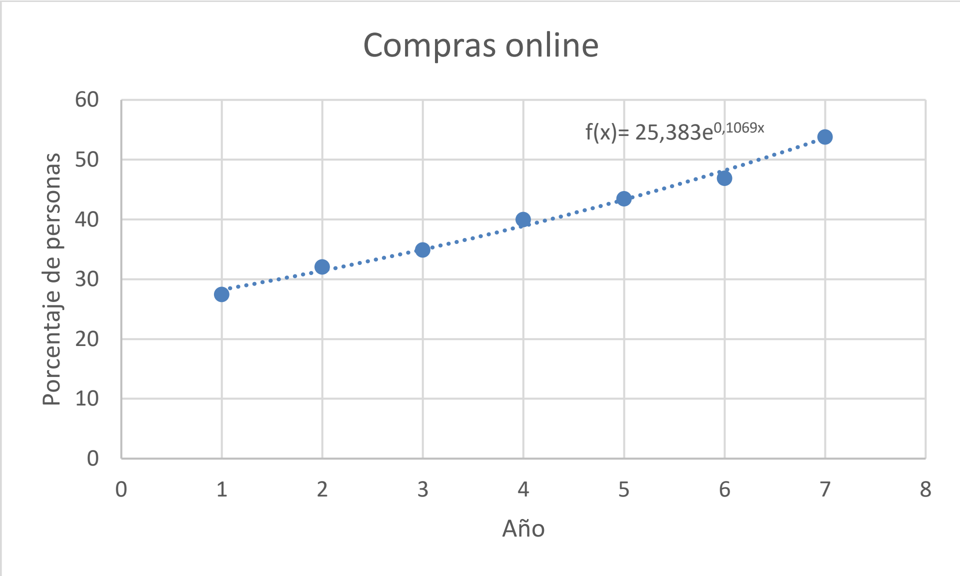
Año		Porcentaje
2014	1	27,5
2015	2	32,1
2016	3	34,9
2017	4	40
2018	5	43,5
2019	6	46,9
2020	7	53,8



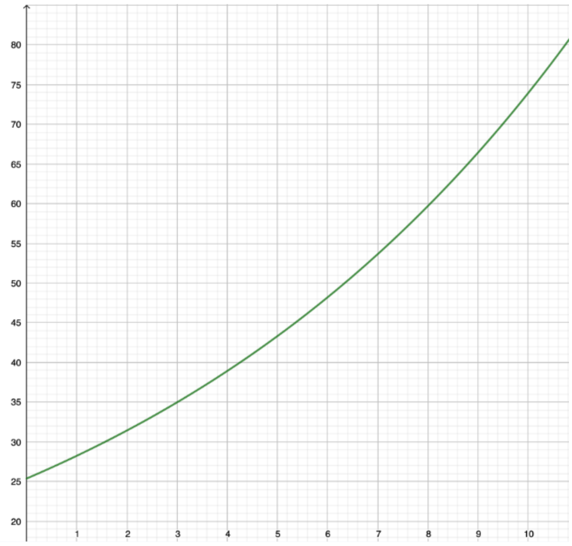
Mientras que el diagrama de dispersión utilizando Excel es el siguiente:



2. Ajusta un modelo exponencial para estos datos de la forma $y = ae^{bx}$.



3. Mediante GeoGebra u otro programa adecuado, representa gráficamente la función exponencial obtenida en el apartado anterior.



4. Si se mantiene esta tendencia exponencial, ¿qué porcentaje de personas se espera que compren por Internet en los próximos dos años?

Se estima que en 2022 compren un 63,43 % de las personas.