1. Sistemas de dos ecuaciones lineales

1. Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - 6y = 5 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 6x + 5y = 42 \\ 3x + 21 = \dfrac{5}{2}y \end{cases}$

---

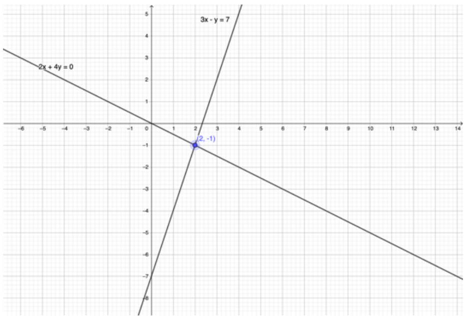
a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$ Utilizaremos el método de sustitución.

Despejamos y de la 1ª ecuación: $y = 3x - 7$

Y sustituimos en la 2ª ecuación: $2x + 4(3x - 7) = 0 \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow x = 2.$

Luego, $y = 3 \cdot 2 - 7 = -1$

La solución es: $x = 2$, $y = -1$



b) $\begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$ Utilizaremos el método de sustitución.

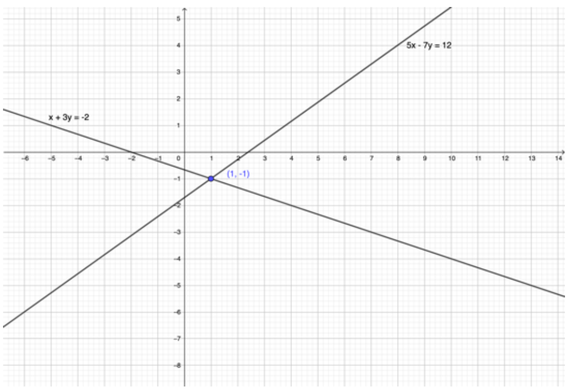
Despejamos x de la 2ª ecuación: $x = -3y - 2$

Y sustituimos en la 1ª ecuación:

$5(-3y - 2) - 7y = 12 \Rightarrow -22y = 22 \Rightarrow y = -1$

Luego, $x = -3 \cdot (-1) - 2 = 1$

La solución es: $x = 1$, $y = -1$



c) $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 3x - 4y = 24 \end{cases}$ Utilizaremos el método de reducción.

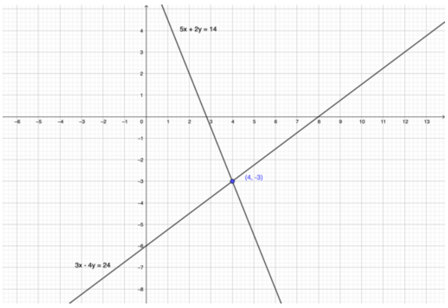
$$\xrightarrow{E_1 \to 2E_1} \begin{cases} 10x + 4y = 28 \\ 3x - 4y = 24 \end{cases}$$

$$13x \quad = 52 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{52}{13} = 4.$$

Por ejemplo, sustituyendo en la 1a ecuación resuelta:

$5 \times 4 - 2y = 14 \;\Rightarrow\; 2y = -6 \;\Rightarrow\; y = -3$

La solución es: $x = 4$, $y = -3$



d) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ Utilizaremos el método de reducción para resolver las dos primeras ecuaciones:

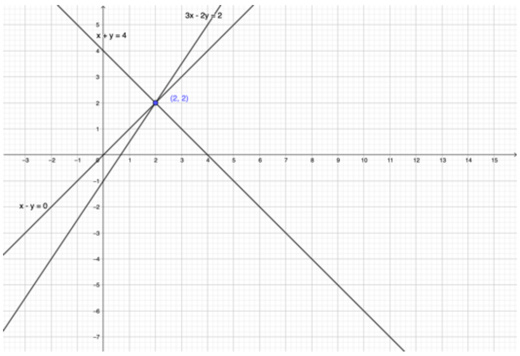
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$2x \quad = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2$,luego $2 + y = y \;\Rightarrow\; y = 2.$

Veamos, pues, si la solución $x = 2$, $y = 2$, verifica la tercera ecuación.

$3 \times 2 - 2 \times 2 = 2 = 2$

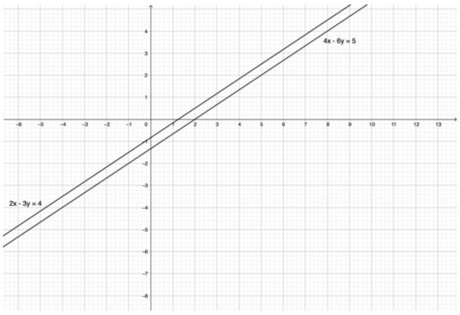
En consecuencia, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = 2.$



e) $\begin{cases} 4x - 6y = 5 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ Utilizaremos el método de reducción.

$$\xrightarrow{E_2 \to -2E_1} \begin{cases} 4x - 6y = 5 \\ -4x + 6y = 4 \end{cases}$$
$$0 = -3$$

El sistema no tiene solución. Es un sistema incompatible (SI)



f) $\begin{cases} 6x + 5y = 42 \\ 3x + 21 = \dfrac{5}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 42 \\ 6x + -5y = 42 \end{cases}$

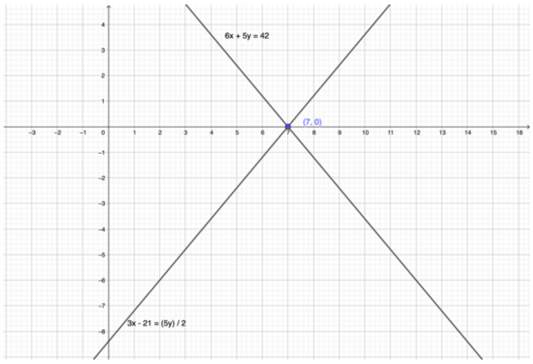
Si utilizamos el método de reducción y sumamos ambas ecuaciones queda:

$12x = 84 \Rightarrow x = \dfrac{84}{12} = 7$

Por tanto:

$6 \cdot 7 + 5y = 42 \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow y = 0$

La solución es: $x = 7$, $y = 0$.



2. Distribución del Trabajo. Un restaurante tiene meses para dos y para cuatro comensales. El aforo es de 50 personas. Si el propietario tiene suficientes camareros para atender a 17 mesas, ¿de cuántas meses de cada tipo dispone?

Sean x, y el mínimo de meses para dos y cuatro comensales, respectivamente.

$$\begin{matrix} \text{Total de mesas} \to \\ \text{Total de cliente} \to \end{matrix} \begin{cases} x + y = 17 \\ 2x + 4y = 50 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y = -x + 17$. Y sustituyendo en la 2ª ecuación:

$2x + 4(-x + 17) = 50 \Rightarrow -2x = -18 \Rightarrow x = 9$

Luego, $y = -9 + 17 = 8$

Por tanto, el restaurante dispone de 9 mesas para dos y 8 mesas para cuatro personas.

3. Inversión. Sara depositó 16000 € en dos cuentas de ahorro, una tiene un TIN del 5 % y la otra del 3,5 %. Si el interès bruto anual que recibió fue de 695 €, ¿cuánto dinero depositó en cada una de las cuentas?

Sean x e y las cantidades que depositó en las cuentas que le dan un 5 % y un 3,5 %, respectivamente. El enunciado da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{Cantidad total depositada} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x+y=16000 \\ 0{,}05x+0{,}035y=695 \end{array} \right. \\ \text{Intereses brutos totales} \rightarrow & \end{array}$$

De la primera ecuación: $y=-x+16000$

Sustitúyelo en la segunda ecuación:

$$0{,}05x-0{,}035\left(-x+16000\right)=695 \quad \Rightarrow \quad 0{,}015x=135 \Rightarrow x\frac{135}{0{,}015}=9000$$

Luego, $y=-9000-16000=7000$

Por tanto,depositó 9000 € a un TIN del 5 % y 7000 € a un TIN del 3,5 %.

2. Sistemas de tres ecuaciones lineales

4. Aplica el método de Gauss para resolver estos sistemas.

a) $\left\{ \begin{array}{l} x-3y+z=-4 \\ 2x+3y-4z=-2 \\ 3x+12y-7z=2 \end{array} \right.$ **b)** $\left\{ \begin{array}{l} x+2y+4z=-1 \\ 5x+y+z=2 \\ 3x-y+2z=2 \end{array} \right.$

---

a) $\left\{ \begin{array}{l} x-3y+z=-4 \\ 2x+3y-4z=-2 \\ 3x+12y-7z=2 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{c} E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-3E_1 \end{array}} \left\{ \begin{array}{r} x-3y+z=-4 \\ 9y-6z=6 \\ 21y-10z=14 \end{array} \right.$

$$\xrightarrow{E_3 \to 3E_3-7E_2} \left\{ \begin{array}{r} x-3y+z=-4 \\ 9y-6z=6 \\ 12z=0 \end{array} \right.$$

$z=0\ ,\quad y=\dfrac{2}{3}\ ,\quad x=2$

La solución es: $x=-2\ ,\quad y=\dfrac{2}{3}\ ,\quad x=0$ (SCD)

b) $\begin{cases} x+2y+4z=-1 \\ 5x+y+z=2 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3 - 3E_1]{E_2 \to E_2 - 5E_1} \begin{cases} x+2y+4z=-1 \\ -9y-19z=7 \\ -7y-10z=5 \end{cases}$

$\xrightarrow{E_3 \to 9E_3 - 7E_2} \begin{cases} x+2y+4z=-1 \\ -9y-19z=7 \\ -43z=4 \end{cases}$

$z=\dfrac{-4}{43}$, $y=\dfrac{-25}{43}$, $x=\dfrac{23}{43}$

La solución es: $x=\dfrac{23}{43}$, $y=\dfrac{-25}{43}$, $z=\dfrac{-4}{43}$ (SCD)

5. Resuelve mediante el método de Gauss estos sistemas:

a) $\begin{cases} x-y-2z=-4 \\ 2x+y-z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 2x+y-z=6 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-3y+z=32 \end{cases}$

---

a) $\begin{cases} x-y-2z=-4 \\ 2x+y-z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3 - E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \begin{cases} x-y-2z=-4 \\ 3y+3z=12 \\ 3y+3z=6 \end{cases}$

$\xrightarrow{E_3 \to E_3 - E_2} \begin{cases} x-y-2z=-4 \\ 3y+3z=12 \\ 0=-6 \end{cases}$

El sistema no tiene solución. Es incompatible (SI)

b) $\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 2x+y-z=6 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3 + E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \begin{cases} x+2y+z=6 \\ -3y-3z=-6 \\ 3y+3z=6 \end{cases}$

$\xrightarrow{E_3 \to E_3 + E_2} \begin{cases} x+2y+z=6 \\ -3y-3z=-6 \\ 0=0 \end{cases}$

Haciendo $x=2+\lambda$, $y=2-\lambda$, $z=\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (SCI).

c) $\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-3y+z=32 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \to 2E_2 - E_1} \begin{cases} 2x+y-z=4 \\ -7y+3z=60 \end{cases}$

Haciendo $x=\lambda$, entonces $y=\dfrac{3/-60}{7}$ y $x=\dfrac{2\lambda+44}{7}$

6. Inversión en fondos sostenibles. Nicolás tomo la decisión de invertir 200 000 € en tres fondos de inversión sostenibles A, B y C. Estos fondos le garantizaban un interès anual del 6 % en A, del 7 % en B y del 4 % en C. Al finalitzar el año, Nicolás recibió unos intereses brutos de 12 2000 €. Sabiendo que la cantidad que invirtió en B fue la suma de las cantidades que invirtió en A y C, ¿cuánto dinero invirtió en cada fondo?

Sean *x, y, z* el dinero en euros que invirtió Nicolás en los fondos A, B, C, respectivamente. El enunciado da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

Cantidad total invertida	$\rightarrow$	$x+y+z=200\ 000$
Intereses brutos totales	$\rightarrow$	$0{,}06x+0{,}07y+0{,}04z=12\ 200$
Relaci n entre las cantidades invertidas en fondos	$\rightarrow$	$y=x+z$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=10\ 000 \\ 13x+11z=1\ 220\ 000 \end{cases}$$ Si $z=100\ 000-x$,

Entonces: $13x+11(100\ 000-x)=1\ 220\ 000 \quad \Rightarrow \quad x=60\ 000$

$z=40\ 000 \qquad y=100\ 000$

Invirtió 60 000 € en el fondo A, 40 000 en el fondo C y 100 000 € en el fondo B.

7. Determina la ecuación de la paràbola $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que pasa por los puntós (0,5),(-1,10) y (2,7).

Si la parábola pasa por cada uno de los tres puntós, entonces tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones en tres incógnitas:

$$\begin{matrix} (0,5) \rightarrow \\ (-1,10) \rightarrow \\ (2,7) \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} \boxed{5=c} \\ 10=a-b+c \\ 7=4a+2b+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=5 \\ 4a+2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} a-b=5 \\ 2a+b=4 \end{cases} \\ \hline 3a=6 \end{array} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Luego, $\boxed{b=3}$

La ecuación de la parábola es: $y=2x^2-3x+5$

3. Sistemas de ecuaciones no lineales

8. Resuelve los siguientes sistemes de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2-y=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2-y=3 \end{cases}$ Lo resolveremos por reducción.

$\overline{y^2+y=6} \Rightarrow y^2+y-6=0 \Rightarrow y_1=-3\,,\, y_2=2$

Luego, $x^2+3=3 \Rightarrow x_1=0$

$x^2-2=3 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x_{21}=+\sqrt{5}$ y $x_{22}=-\sqrt{5}$

La circunferencia $x^2+y^2=9$ y la parábola $y=x^2-3$ se cortan en los tres puntos siguientes:

$P_1(0,-3),\ P_2(-1,2),\ P_3(1,2).$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ Lo resolveremos por sustitución.

Despejando y de la 2ª ecuación: $y=x+1$

Y sustituimos en la 1ª ecuación:

$x^2+(x+1)^2=5 \Rightarrow x^2+x^2+2x+1=5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2+2x=4 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1.$

Luego, $y_1=-2+1=-1,\ y_2=1+1=2.$ Solución: $\begin{cases} x_1=-2, y_1=-1 \\ x_2=1, y_2=2 \end{cases}$

La circunferencia $x^2+y^2=5$ y la recta $x-y=-1$ se cortan en los dos untos siguientes:

$P_1(-1,-2)$ y $P_2(1,2)$

c) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ Lo resolveremos por sustitución.

De la 1ª ecuación: $y=5-x$

Sustituyendo en la 2ª ecuación:

$x(5-x)=6 \Rightarrow 5x-x^2=6 \Rightarrow x^2-5x+6=0$

$y_1=5-2=3,\ y_2=5-3=2.$

La solución es: $x_1=2,\ y_1=3$ y $x_2=3,\ y_2=2.$

La recta $x+y=5$ y la parábola $xy=6$ se cortan en los puntos $P_1(2,3)$ y $P_2(3,2)$.

9. Representa gráficamente las ecuaciones de los siguientes sistemes y halla los puntós de corte. Después, resuelve el sistema y verifica la solución obtenida.

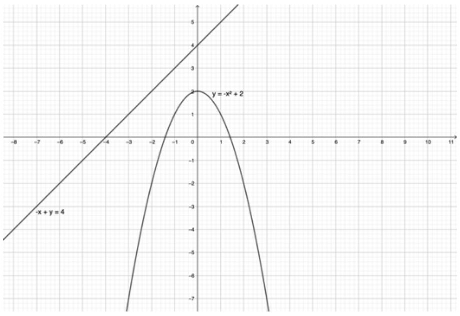
$a)\ \begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y = -4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ Resolviéndolo por igualación despejando la y de ambas ecuaciones, resuelta:

$-x^2 + 2 = 4 + x \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow$

No tiene solución.

Efectivamente, la paràbola $y = -x^2 + 2$ y la recta $-x + y = 4$ no se cortan en ningún punto.



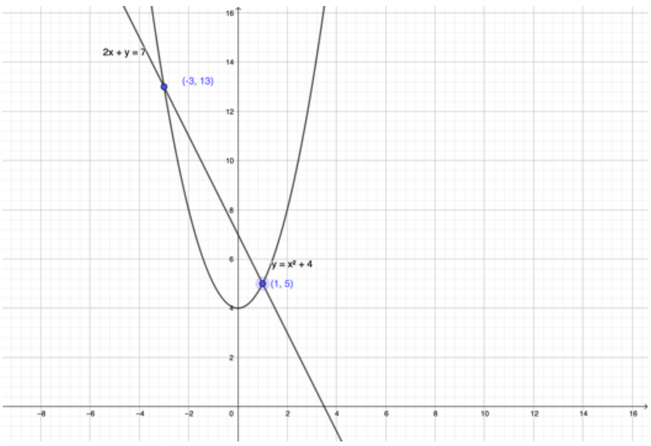
b) $\begin{cases} x^2 - y = -4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ También lo resolvemos por igualación.

$x^2 + y = 7 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1$

Luego, $y_1 = 7 - 2\cdot(-3) = 13$, $y_2 = 7 - 2\cdot 1 = 5$

Las soluciones son: $x_1 = -3$, $y_1 = 13$ y $x_2 = 1$, $y_2 = 5$.

Comprobamos que la paràbola $x^2 - y = -4$ y la recta $2x + y = 7$ se cortan en los puntos $(-3, 13)$ y $(1, 5)$.



10. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones exponenciales:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 4^x + 4^y = 68 \end{cases}$$

Efectuamos el cambio de variable $2^x = u$ y $2^y = v$.

Así resulta el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ u^2 + v^2 = 68 \end{cases}$$ despejando en la 1ª ecuación u:

$$u = 10 - v$$

Y, sustituimos en la 2ª ecuación:

$$(10 - v)^2 + v^2 = 68 \Rightarrow 100 - 20v + v^2 + v^2 = 68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2v^2 - 20v + 32 = 0 \Rightarrow v^2 - 10v + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$v_1 = 2 \ , \ v_2 = 8$$

Por tanto, $u_1 = 10 - 2 = 8$, $u_2 = 10 - 8 = 2$.

Si $u_1 = 8$, entonces: $2^x = 8 \Rightarrow x_1 = 3$

Si $u_2 = 2$, entonces: $2^x = 2 \Rightarrow x_2 = 1$

Por otra parte,

Si $v_1 = 2$, entonces: $2^y = 2 \Rightarrow y_1 = 1$

Si $u_2 = 2$, entonces: $2^y = 8 \Rightarrow y_2 = 3$.

Las soluciones del sistema son:

$x_1 = 3$, $y_1 = 1$ y $x2 = 1$, $y_2 = 3$.

11. Resuelve los siguientes sistemes de ecuaciones logarítmicas:

a) $\begin{cases} 2\ \log x - \log y = 0 \\ 2\ \log x + 2\log y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = 2\ \log x + 3 \\ y = \log x + 1 \end{cases}$

a) Para resolverlo aplicaremos propiedades de los logaritmos. Así:

$$2\log x - \log y = 0 \Rightarrow \log x^2 - \log y = 0 \Rightarrow$$

$$\log \frac{x^2}{y} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y} = 10^0 = 1$$

$$2\log x + 2\log y = 3 \Rightarrow \log x^2 - \log y^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\log x^2 \cdot y^2 = 3 \Rightarrow x^2 \cdot y^2 = 10^3$$

Por tanto, el sistema equivalente es:

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = 1 \\ x^2 y^2 = 10^3 \end{cases}$ Despejando x^2 de la 1ª ecuación y sustituyendo a la 2ª ecuación, resulta:

$y \cdot y^2 = 10^3 \Rightarrow y^3 = 10^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{10^3} = 10$

Luego $x^2 = 10 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{10}$ (No puede ser solución.) y $x_2 = \sqrt{10}$.

La solución es: $x = \sqrt{10}$ y $y = 10$

b) $\begin{cases} y = 2\log x + 3 \\ y = \log x + 1 \end{cases}$ Por igualación:

$2\log x + 3 = \log x + 1 \Rightarrow 2\log x + 3 - \log x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = -2 \Rightarrow \boxed{x = 10^{-2}}$, luego $\boxed{y = \log 10^{-2} + 1 = -1}$

La solución es: $x = 10^{-2}$, $y = -1$

12. Geometría. El perímetro de un rectángulo es de 85 cm, y su diagonal mide 32,5 cm. Calcula los lados del rectángulo.

De la figura resulta:

Per metro $\rightarrow$
Diagonal $\rightarrow$
$\begin{cases} 2x + 2y = 85 \\ x^2 + y^2 = 32{,}5^2 \end{cases}$

De la 1ª ecuación despejamos y: $y = -x + 42{,}5$

Y sustituimos en la 2ª ecuación:

$x^2 + (-x + 42{,}5)^2 = 32{,}5^2 \Rightarrow 2x^2 - 85x + 750 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 12{,}5$, $x_2 = 30$

Luego,

$y_1 = 30$, $y_2 = 12{,}5$.

Por tanto, se trata de un rectángulo de lado 12,5 y 30 cm.

13. El producto de dos números es 135, y su diferencia es igual a 6. Halla estos números.

Del enunciado deducimos el siguiente sistema donde x e y son los números que buscamos.

$\begin{cases} x \cdot y = 135 \\ x - y = 6 \end{cases}$

De la 2ª ecuación: $x = 6 + y$

Sustituimos en la 1ª ecuación:

$(6 + y) \cdot y = 135 \Rightarrow y^2 + 6y - 135 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ y_1 = -15,\ \ y_2 = 9$

Luego, $x_1 = -9,\ x_2 = 15$

Los dos números son: -9 y -15 o 9 y 15.

14. Dimensiones de parcela. Un terreno rectangular de 54 hectáreas se quiere dividir en dos parcelas iguales y construir una valla por todo el perímetro de las parcel·les que es de 3,6 kilómetros (se considera la valla común a las parcel·les). Calcula las dimensiones del terreno y de cada una de las parcel·les.

De la figura deducimos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l} \text{Superficie} \rightarrow \\ \text{Perimetro} \rightarrow \end{array} \quad \begin{cases} xy = 54 \\ 2x + 2y + y = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy = 54 \\ 2x + 2y + y = 36 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y = \dfrac{54}{x}$, entonces:

$$2x + 3\cdot\frac{54}{x} = 36 \Rightarrow 2x^2 - 36x + 162 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 0 \Rightarrow x = 9$$

Luego, $y = \dfrac{54}{9} = 6.$

Las dimensiones del terreno son 9 y 6 hectómetros. Cada una de las parcelas tienen 4,5 x 6 hectómetros.

4. Sistemas de inecuaciones

15. Resuelve estos sistemes de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} x^2 + x < 12 \\ x^2 - x < 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2 < x - 3 < 2 \\ x^2 + x \geq 6 \end{cases}$

a) $x^2 + x < 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 < 0$

$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 3$

Solución: $x \in (-4,3)$

$x^2 - x < 12 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0$

$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$

Solución: $x \in (-1,4)$.

Por tanto, la solución es la intersección de las dos soluciones, es decir, $(-4,3) \cap (-1,4) = (-1,3)$.

La solución del sistema es: $x \in (-1,3)$

b) $-2 < x - 3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$ Solución: $x \in (1,5)$.

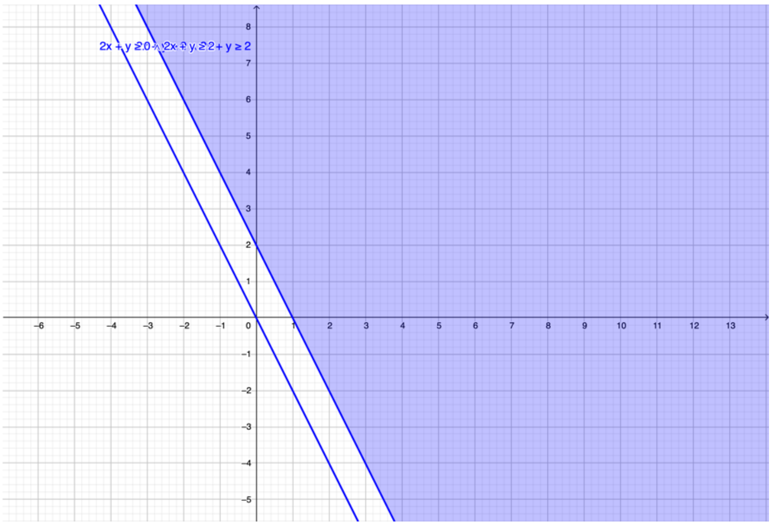
$x^2 + x \geq 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 \geq 0$

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x^1 = -3,\ x^2 = 2.$

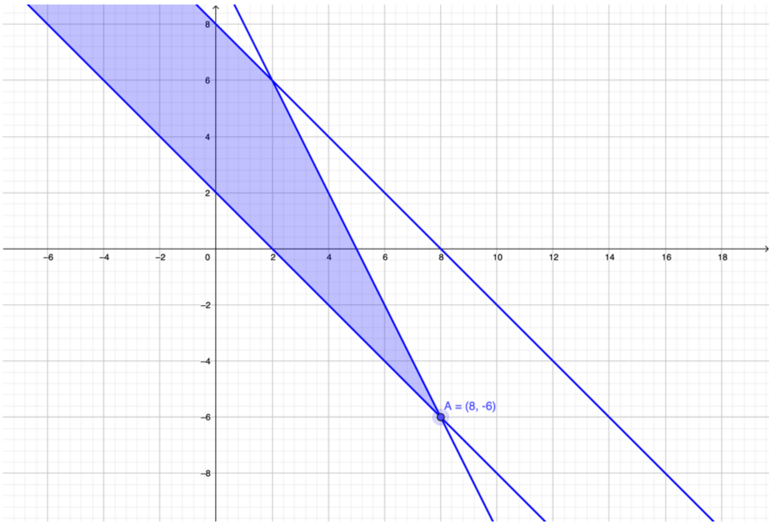
La solución del sistema es la intersección de las dos soluciones, es decir, $x \in [2,5)$

16. Dibuja el recinto solución, halla los vértices y analiza si se trata de una región cerrada o abierta:

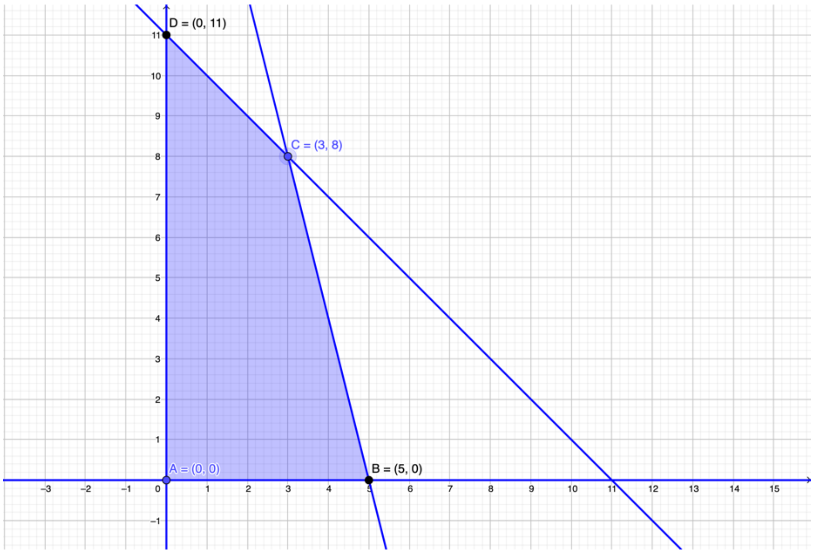
a) $\begin{cases} 2x+y\geq 0 \\ 2x+y\geq 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y\geq 2 \\ x+y\leq 8 \\ 2x+y\leq 10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y\leq 11 \\ 4x+y\leq 20 \\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \end{cases}$



a) Se trata de una región abierta.



b) También se trata de una región abierta.



c) Es una región cerrada delimitada por el polígono de vértices A(0,0), B(5,0), C(3,8) y D(0,11).

17. Encuentra los números enteros que verifiquen los siguientes xxxxxx: $x \le 30$, $x \le 20$, $50 - x \le 7$.

- $x \le 30$, $x \in Z$
- $x \leq 20$, $x \in Z$
- $50 - x \leq \quad \Rightarrow \quad x \geq 43$

  $x \in Z$

No existe ningún número entero que verifique las tres inecuaciones puesto que la intersección es vacía.

18. Fabricación artesanal. Una empresa confecciona dos tipus de juguetes: uno estándar y otro más elaborado. El estándar requiere 3 horas en soportes y 4 en detalles, mientras que el modelo más elaborado necesita 4 horas de Trabajo en soportes y 8 en detalles. Si al mes dispone de 120 horas de trabajo en soportes y 200 en detalles, plantea un sistema de inecuaciones que permita encontrar las distintas combinaciones de modelos de juguetes que pueden confeccionar mensualmente. Luego, dibuja la región factible y halla sus vértices.

En la siguiente tabla resuminos la información del enunciado:

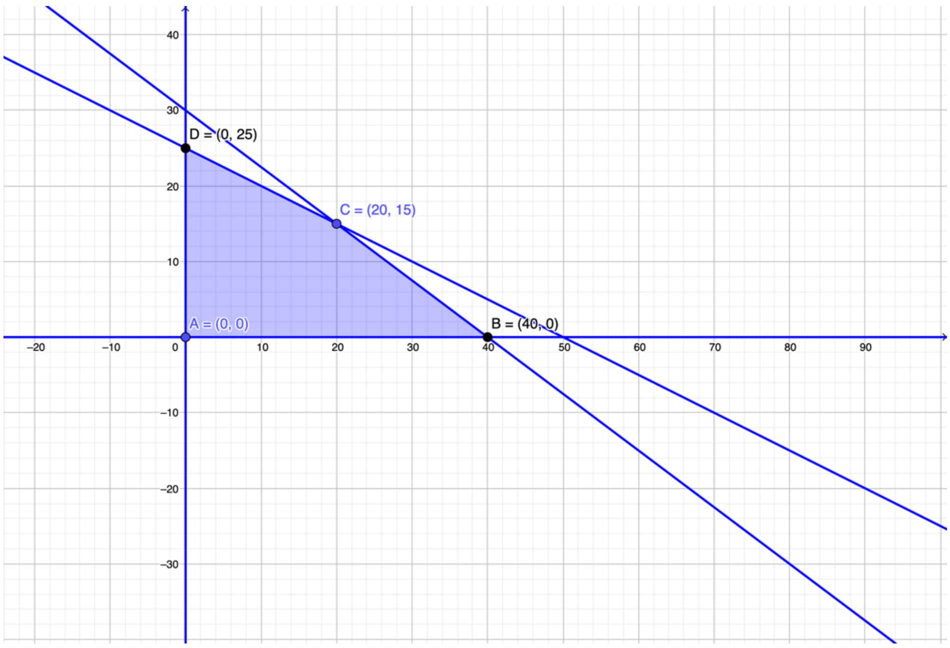
	Estándar	Elaborado	Horas mensuales
Soportes	3	4	120
Detalle	4	8	200

Si designamos por x e y el número de juguetes estándar y más elaborados, respectivamente, que puede confeccionar mensualmente el artesano, entonces tenemos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+4y \leq 120 & \leftarrow \text{Disponibilidad de horas en soportes.} \\ 4x+8y \leq 200 & \leftarrow \text{Disponibilidad de horas en detalles.} \end{cases}$$
$$x, y \leq 0$$

Construimos la siguiente tabla con la información de cada una de las inecuaciones:

Ecuación	Ptos. corte ejes	Inecuación	Pto. prueba P (0,0)	Conclusión
r_1:3x + 4y =120	(40,0) y (0,30)	3x + 4y $\leq$ 120	0 $\leq$ 120	Sí
r_2:4x + 8y =200	(50,0) y (0,25)	4x + 8y $\leq$ 200	0 $\leq$ 200	Sí



La región factible queda delimitada por el polígono de vértices A (0,0), B (40,0), C (20,15) y D (0,25).

ACTIVIDADES

Sistemas de ecuaciones lineales

19. Utiliza el método de sustitución y resuelve estos sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+9y=-24 \\ 7x+3y=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

a) Despejamos x de la 1ª ecuación: $x=\frac{-24-9y}{4}=-6-\frac{9}{4}y$

Sustituimos en la 2ª ecuación:

$7\cdot\left(-6-\frac{9}{4}y\right)-3y=8 \Rightarrow -42-\frac{63}{4}y-3y=8 \Rightarrow$

$\Rightarrow -168-63y-12y=32 \Rightarrow -75y=200 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-\frac{8}{3}$

Luego, $x=-6-\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{-8}{3}\right)=0$

La solución es: $x=0, y=\frac{-8}{3}$

b) Despejamos y de la 2ª ecuación: $y=3x$

Sustituimos en la 1ª ecuación:

$2x+5\cdot 3x=0 \Rightarrow 17x=0 \Rightarrow x=0$

Luego, $y=0$

La solución es: $x=0,\ y=0$

20. Resuelve, utilizando el método de reducción, los sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 5x-4y=-35 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x+4y=12 \\ 6x-y=-3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 5x-4y=-35 \end{cases} \begin{array}{c} E_1 \to 5E_1 \\ E_2 \to -3E_2 \end{array} \begin{cases} 15x+10y=5 \\ -15x+12y=105 \end{cases}$

$22y=110 \Rightarrow$

$y=\frac{110}{22}=5$

De la 1ª ecuación obtenemos, por ejemplo, el valor de x.

$3x+2\cdot 5=1 \Rightarrow 3x=-9 \Rightarrow x=-3$

La solución es: $x=-3$, $y=5$.

b) $\begin{cases} -x+4y=12 \\ 6x-y=-3 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \to 6E_1} \begin{cases} -6x+24y=72 \\ 6x-y=-3 \end{cases}$

$\qquad 23y=69 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{69}{23}=3$

En la 1ª ecuación: $-x+4\cdot 3=12 \Rightarrow x=0$

La solución es: $x=0$, $y=3$.

21. Resuelve, utilizando el método de igualación, los sistemas:

a) $\begin{cases} 6x+8y=14 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{1}{3}x+y=4 \\ 9x-3y=1 \end{cases}$

a) Despejamos y de ambas ecuaciones:

$8y=-6x+14 \Rightarrow y=\frac{-6x+14}{8}=\frac{-3x+7}{4}$

$-y=2-3x \Rightarrow y=3x-2$

Luego,

$\frac{-3x+7}{4}=3x-2 \Rightarrow -3x+7=12x-8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x=15 \Rightarrow x=1$

Por tanto,

$y=3\cdot 1-2=1.$

La solución es: $x=1$, $y=1$

b) Despejamos y de ambas ecuaciones:

$y=-\frac{1}{3}x+4$

$-3y=-9x+1 \Rightarrow y=3x-\frac{1}{3}$

Luego,

$-\frac{1}{3}x+4=3x-\frac{1}{3} \Rightarrow -x+12=9x-1$

$10x=13 \Rightarrow x=\frac{13}{10}$

Así:

$y=3\cdot\frac{13}{10}-\frac{1}{3}=\frac{107}{30}$

La solución es:

$x=\frac{13}{10}$, $y=\frac{107}{30}$.

22. Representa gráficamente las rectas dadas por los sistemas y, después, resuélvelos de forma analítica.

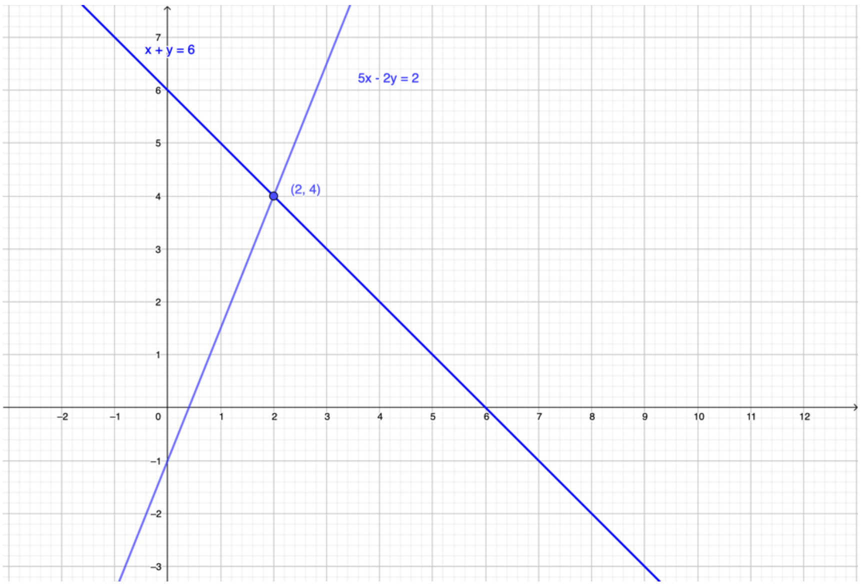
a) $\begin{cases} x+y=6 \\ 5x-2y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{2}y=9 \\ 4x+15y=\dfrac{15}{2} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -x+5y=12 \\ 3x-15y=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ 5x-2y=2 \end{cases} \rightarrow y=6-x$

$5x-2(6-x)=2 \Rightarrow \quad 7x=14 \Rightarrow \quad x=2$

Luego, $y=6-2=4.$

Solución: $x=2,\ y=4.$ (SCD)



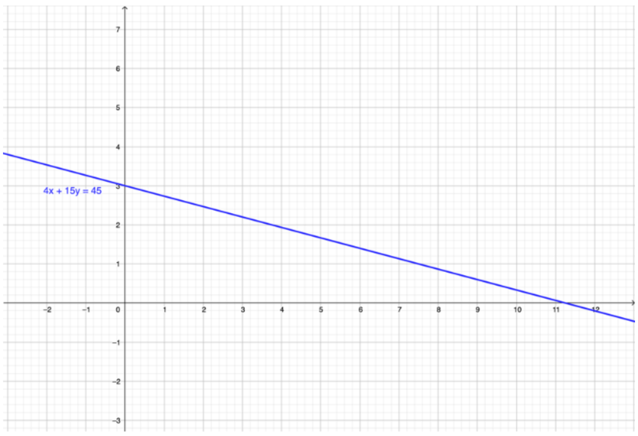
b) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{2}y=9 \\ 4x+15y=\dfrac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+15y=45 \\ 4x+15y=45 \end{cases} \Rightarrow$ Dos ecuaciones iguales.

$4x+15y=45 \Rightarrow \ y=\dfrac{45-4x}{15}=3-\dfrac{4}{15}x$

Haciendo $x=\lambda$, entonces $y=3-\dfrac{4}{15}\lambda$

Solución: $x=\lambda,\ y=3-\dfrac{4}{15}\lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}.$

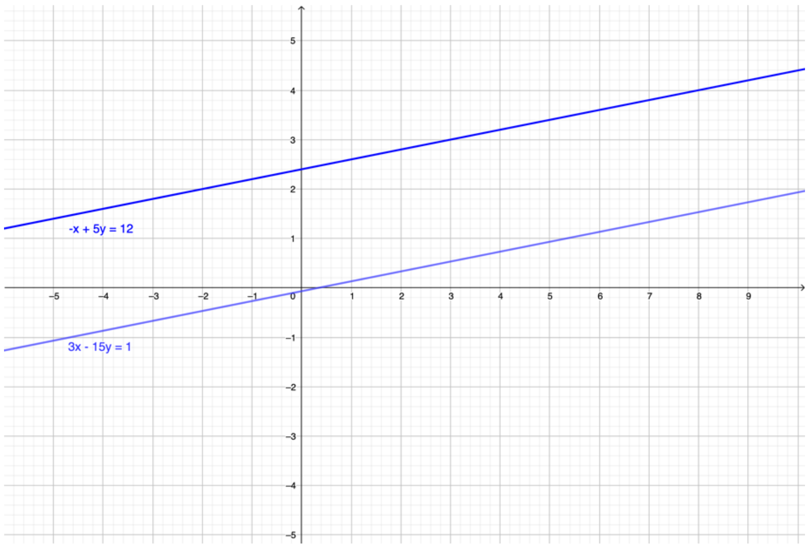
El sistema tiene infinitas soluciones. (SCI).



c) $\begin{cases} -x+5y=12 \\ 3x-15y=1 \end{cases} \quad \rightarrow x=5y-12$

$3(5y-12)-15y=1 \Rightarrow \quad 0=37.$

El sistema no tiene solución. (SI).



23. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}-4=\dfrac{y+4}{3} \\ \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- $\dfrac{x+2}{2}-4=\dfrac{y+4}{3} \Rightarrow 3(x+2)-6\cdot 4=2(y+4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x+6-24=2y+8 \Rightarrow 3x-2y=26$

- $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{1}{2} \Rightarrow 3(x+y)=2(x-y)+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x+3y=2x-2y+3 \Rightarrow x+5y=3$

Luego,

$$\begin{cases} 3x-2y=26 \\ x+5y=3 \end{cases} \xrightarrow[E_2 \rightarrow -3E_2]{} \begin{cases} 3x-2y=26 \\ -3x+15y=-9 \end{cases}$$
$$\overline{-17y=17} \Rightarrow$$

$y=-1.$

Luego, $x+5\cdot(-1)=3 \Rightarrow x=8$

La solución es: $x=8$, $y=-1.$

24. Dado el siguiente sistema, ¿qué relación existe entre a y b para que el sistema tenga solución única?

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 5x-3y=7 \\ ax+by=5b \end{cases}$$

Comenzamos resolviendo el sistema formado por las dos primeras ecuaciones. Así:

$\begin{cases} x+y=3 \\ 5x-3y=7 \end{cases}$ De la 1ª ecuación despejamos y: $y=-x+3$.

y sustituimos en la 2ª ecuación:

$$5x-3(-x+3)=7 \Rightarrow 8x=16 \Rightarrow x=2$$

Luego, $y=-2+3=5$.

La solución es: $x=2$, $y=1$.

Por tanto, si el sistema debe tener solución única, la solución hallada debe verificar la tercera ecuación. Luego:

$$a\cdot 2+b\cdot 1=5b \Rightarrow 2a=4b \Rightarrow \boxed{a=2b}$$

25. Utiliza el método gráfico para hallar la solución del sistema. A continuación, resuélvelo y verifica la solución obtenida con la dada gráficamente.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 5x-3y=9 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Resolvemos, por ejemplo, el sistema formado por las 2ª y 3ª ecuación, es decir:

$$\begin{cases} 5x-3y=9 \\ x+y=1 \end{cases} \rightarrow y=1-x$$

$$5x-3(1-x)=9 \Rightarrow 8x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{2}{3}$$

Luego, $y=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.

La solución de las dos ecuaciones es: $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{-1}{2}$.

Veamos si verifica la otra ecuación.

$$3\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}\neq 5$$

Por tanto, el sistema no tiene solución. (SI).

26. Un grupo de profesores van a elaborar un examen que consta de 15 preguntas de verdadero o falso, 10 de opción múltiple y 5 de ensayo. Deciden que cada pregunta de opción múltiple valga el doble que la de verdadero o falso, y que cada pregunta de ensayo valga el triple que la de verdadero o falso. Si la puntuación máxima es de 10 puntos, ¿qué puntuación deberían asignar a cada tipo de pregunta?

Sean: $x =$"puntuación de pregunta de verdadero o falso"
$y =$" puntuación de pregunta de opción múltiple"
$z =$" puntuación de pregunta de ensayo"

Con la información del enunciado deducimos el siguiente sistema de tres ecuaciones en tres incógnitas:

$$\begin{cases} 15x + 10y + 5z = 10 \\ y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$$

Luego, $15x + 10\cdot(2x) + 5(3x) = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 15x + 20x + 15x = 10 \ \Rightarrow\ 50x = 10 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ x = \dfrac{10}{50} = 0{,}2$
$y = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4\ ,\ z = 3\cdot 0{,}2 = 0{,}6.$
En observancia,
$x = 0{,}2\ ,\ y = 0{,}4\ ,\ z = 0{,}6.$
Cada pregunta de verdadero o falso puntúa 0,2, la de opción múltiple 0,4 y 0,6 la de ensayo.

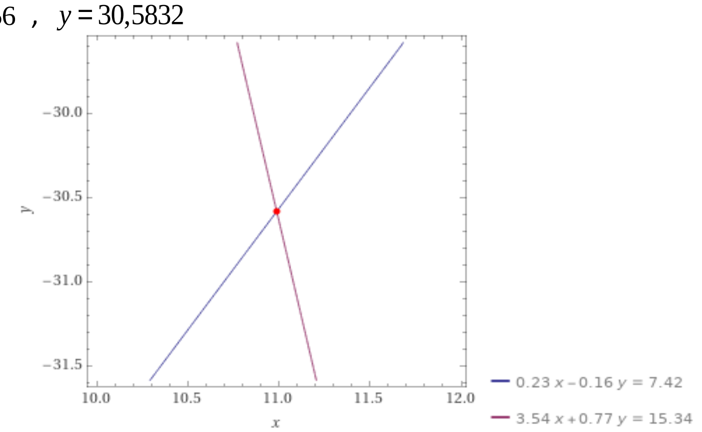
27. Utiliza una calculadora o software adecuado para resolver analítica y geométricamente los siguientes sistemas, dando la solución con dos decimales:

a) $\begin{cases} 0{,}23x - 0{,}16y = 7{,}42 \\ 3{,}54x + 0{,}77y = 15{,}34 \end{cases}$

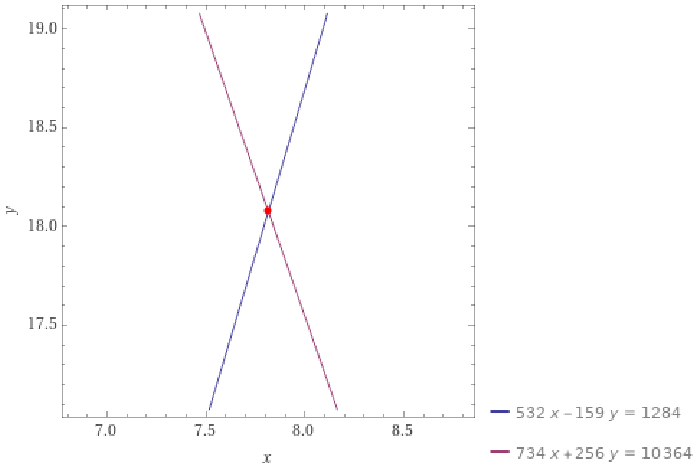
b) $\begin{cases} 532x - 159y = 1284 \\ 734x + 256y = 10364. \end{cases}$

Utilizando, por ejemplo, WolframAlpha se obtiene:

a) $x = 10{,}9856\ ,\ \ y = 30{,}5832$



b) $x = \dfrac{988290}{126449}$, $y = \dfrac{2285596}{126449}$



28. Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} x - 2y + x = 8 \\ y + 2z = -6 \\ 2z = -4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 8x = 12 \\ y + 3z = 2 \\ 3z = 5. \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 2y + x = 8 \\ y + 2z = -6 \\ 2z = -4 \end{cases}$

De la 3ª ecuación: $z = -2.$

Sustituyendo este valor en la 2ª ecuación: $y = -2$

Y, finalmente, sustituendo los valores de $y_1 z$ en la 1ª ecuación:

$x - 2\cdot(-2) + (-2) = 8 \Rightarrow x = 6$

Solución: $x = 6,\ y = -2,\ z = -2$

b) $\begin{cases} x - y + 8x = 12 \\ y + 3z = 2 \\ 3z = 5. \end{cases}$

De la 3ª ecuación: $z = \dfrac{5}{3}$

Sustituyendo el valor de z en la 2ª ecuación:

$y + 2\cdot\dfrac{5}{3} = -6 \Rightarrow y = -\dfrac{28}{3}$

Finalmente, con estos valores de y y de z sustituidos en la 1ª ecuación, resulta:

$x - 2\cdot\left(-\dfrac{28}{3}\right) + \dfrac{5}{3} = -6 \Rightarrow y = -\dfrac{37}{3}$

Solución: $x = -\dfrac{37}{3}$, $y = -\dfrac{28}{3}$, $z = \dfrac{5}{3}$.

29. Realiza las transformaciones necesarias para obtener sistemas equivalentes escalonados; después, resuélvelos.

a) $\begin{cases} 2y + z = -4 \\ -z = 3 \\ x - 3y2z = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2y + z = -1 \\ x - 3y = 2 \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2y + z = -4 \\ -z = 3 \\ x - 3y2z = 9 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 3y = 2 \\ 2y + z = -1 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \to E_2 - E_1}$

$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2y - z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to E_3 - E_2} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2y - z = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$

Haciendo, por ejemplo, $z = /$, entonces: $y = \dfrac{-1 - /}{2}$.

Y, en la 1ª ecuación:

$x - \dfrac{-1 - /}{2} + / = 1 Þ\ x = \dfrac{1 - 3/}{2}$

Solución: $x = \dfrac{1 - 3/}{2}$, $y = \dfrac{-1 - /}{2}$, $z = /$, $/ \, Î$ □

30. Resuelve, mediante el método de Gauss, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -15 \\ -x + 2y - z = 9 \\ 2x + 4y + 3z = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \\ -x + 3y = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3y + 3z = -2 \\ x - y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - 8z = 9 \\ 2x + 3y - 14z = 16 \\ 4x + 5y - 30z = 34 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x - y - 6z = -17 \\ x + 2y - 5z = -23 \\ 9x + 2y - 7z = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + y - 8z = 9 \\ 2x + 3y - 14z = 16 \\ 4x + 5y - 30z = 14 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -15 \\ -x + 2y - z = 9 \\ 2x + 4y + 3z = -6 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3 - 2E_1]{E_2 \to E_2 + E_1}$

$\begin{cases} x - 3y + 2z = -15 \\ -y + z = -6 \\ 10y - z = 24 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to E_3 + 10E_2}$

$\begin{cases} x - 3y + 2z = -15 \\ -y + z = -6 \\ 9z = -36 \end{cases}$

$$z = \frac{-36}{9} = -4$$
$$-y - 4 = -6 \Rightarrow y = 2$$
$$x - 6 - 8 = -15 \Rightarrow x = -1$$

Solución: $x = -1$, $y = 2$, $z = -4$.

b) $\left\{\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \\ -x + 3y &= -4 \end{aligned}\right. \xrightarrow[E_3 \to E_3 + E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1}$

$$\left\{\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -y - z &= -1 \\ y + 3z &= 5 \end{aligned}\right. \xrightarrow{E_3 \to E_3 + E_2} \left\{\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -y - z &= -1 \\ 2z &= 4 \end{aligned}\right.$$

$$z = 2$$
$$-y - 2 = -1 \Rightarrow y = -1$$
$$x + 2 + 6 = 9 \Rightarrow x = 1$$

Solución: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$

c) $\left\{\begin{aligned} x + 3y + 3z &= -2 \\ x - y + 2z &= -1 \\ 2x + 2y + 3z &= -3 \end{aligned}\right. \xrightarrow[E_3 \to E_3 + 2E_1]{E_2 \to E_2 - E_1}$

$$\left\{\begin{aligned} x + 3y + 3z &= -2 \\ -4y - z &= 1 \\ -4y - 3z &= 1 \end{aligned}\right. \xrightarrow{E_3 \to E_3 - E_2} \left\{\begin{aligned} x + 3y + 3z &= -2 \\ -4y - z &= 1 \\ -4z &= 2 \end{aligned}\right.$$

$$z = -\frac{1}{2}$$
$$-4y + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow -4y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}$$
$$x - \frac{3}{8} - \frac{3}{2} = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$$

Solución: $x = -\frac{1}{8}$, $y = -\frac{1}{8}$, $z = -\frac{1}{2}$.

d) $\left\{\begin{aligned} x + y - 8z &= 9 \\ 2x + 3y - 14z &= 16 \\ 4x + 5y - 30z &= 34 \end{aligned}\right. \xrightarrow[E_3 \to E_3 - 4E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1}$

$$\left\{\begin{aligned} x + y - 8z &= 9 \\ y + 2z &= -2 \\ y + 2z &= -2 \end{aligned}\right. \xrightarrow{E_3 \to E_3 - E_2} \left\{\begin{aligned} x + y - 8z &= 9 \\ y + 2z &= -2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Haciendo $z = \lambda$, entonces $y = -2 - 2\lambda$.

Luego, $x-2-2\lambda-8\lambda=9 \Rightarrow x=11+10\lambda$

Solución: $x=11+10\lambda$, $y=-2-2\lambda$, $z=\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) $\begin{cases} 3x-y-6z=-17 \\ x+2y-5z=-23 \\ 9x+2y-7z=-1 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3-3E_1]{E_2 \to 3E_2-E_1}$

$$\begin{cases} 3x-y-6z=-17 \\ 7y-9z=-52 \\ 5y+11z=50 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to 7E_3-5E_2}$$

$$\begin{cases} 3x-y-6z=-17 \\ 7y-9z=-52 \\ 122z=310 \end{cases}$$

f) $\begin{cases} x+y-8z=9 \\ 2x+3y-14z=16 \\ 4x+5y-30z=14 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3-4E_1]{E_2 \to E_2-2E_1}$

$$\begin{cases} x+y-8z=9 \\ y+2z=-2 \\ y+2z=-22 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to E_3-E_2} \begin{cases} x+y-8z=9 \\ y+2z=-2 \\ 0=-20 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución. Es incompatible.

31. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2y+z=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 3y-z=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2y+z=8 \end{cases}$ Haciendo $y=\lambda$, entonces:

$2\lambda+z=8 \Rightarrow z=8-2\lambda$.

Luego, $x+\lambda-8+2\lambda=4 \Rightarrow x=12+3\lambda$

Solución: $x=12-3\lambda$, $y=\lambda$, $z=8-2\lambda$, , $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 3y-z=0 \end{cases}$ Haciendo $y=\lambda$, entonces:

$3\lambda-z=0 \Rightarrow z=3\lambda$.

Luego, $2x-\lambda+9\lambda=6 \Rightarrow x=3-4\lambda$

Solución: $x=3-4\lambda$, $y=\lambda$, $z=3\lambda$, , $\lambda \in \mathbb{R}$.

32. La suma de tres números es 40. Se sabe que la suma de los dos mayores es igual a tres veces el menor, y que el mayor de los números es ocho unidades inferior a la suma de los dos menores. ¿Cuáles son dichos números?

Sean x, y, z el mayor, el mediano y el menor, respectivamente, de los tres números dados. Del enunciado deducimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=40 \\ x+y=3z \\ x=y+z-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=40 \\ x+y-3z=0 \\ x-y-z=-8 \end{cases}$$

resolvemos el sistema mediante el método de Gauss. Así:

$$\xrightarrow[E_3 \to E_3 - E_1]{E_2 \to E_2 - E_1} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=40 \\ -4z=-40 \\ -2y-2z=-48 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=40 \\ y+z=24 \\ yz=40 \end{cases} \quad z=10\ ,\ y=14\ ,\ x=16$$

Los números son 16, 14 y 10.

33. Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos (-1, -4), (2, 1) y (3, 0), sabiendo que su ecuación general es $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Si pasa por el punto (-1, -4), entonces:

$1+16-a-4b+c=0 \Rightarrow a+4b-c=17$

Si pasa por el punto (2, 1), entonces:

$4+1+2a+b+c=0 \Rightarrow 2a+b+c=-5$

Y, finalmente, si pasa por (3, 0), se cumple:

$9+0+3a+0+c \Rightarrow 3a+c=-9$

Por tanto, el sistema a que da lugar es:

$$\begin{cases} a+4b-c=17 \\ 2a+b+c=-5 \\ 3a+c=-9 \end{cases}$$

Lo resolvemos mediantes el método de Gauss. Así:

$$\xrightarrow[E_3 \to E_3 - 3E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \begin{cases} a+4b-c=1 \\ -7b+3c=-39 \\ -12b+4c=-60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a-4b-c=17 \\ -7b+3c=-39 \\ -3b+c=-15 \end{cases} \xrightarrow{E_3 \to 7E_3 - 3E_2} \begin{cases} a-4b-c=17 \\ -7b+3c=-39 \\ -2c=12 \end{cases}$$

Luego, $c=-6\ ,\ b=3\ ,\ a=23$

La circumferencia tiene de ecuación: $x^2+y^2+23x+3y-6=0$

Sistemas de ecuaciones no lineales

34. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} xy = 2 \\ y = x^2 + \dfrac{7x}{2} - \dfrac{5}{2.} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases} \quad \rightarrow y = \dfrac{8}{x}$

$$x^2 + \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 20 \Rightarrow x^2 + \frac{6y}{x^2} = 20 \Rightarrow x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

Þ $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -4$, $x_4 = 4$

$y_1 = -4$, $y_2 = 4$, $y_3 = -2$, $y_4 = 2$

b) $\begin{cases} xy = 2 \\ y = x^2 + \dfrac{7x}{2} - \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Þ $2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0$

$x_1 = 1$

	2	7	-5	-4
1		2	9	4
	2	9	4	$\boxed{0}$

$2x^2 + 9x + 4 = 0$ Þ

Þ $x2 = -4$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}.$

Luego, $y_1 = -\dfrac{1}{2}$, $y_2 = -4$, $y_3 = 2.$

Solución: $x_1 = 1$, $y_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = -4$, $y_2 = -4$, $x3 = -\dfrac{1}{2}$, $y_3 = 2$

35. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$

a) $+\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

$$\overline{2x^2 = 10} \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{5} \\ x_2 = +\sqrt{5} \end{cases}$$

Luego, $5 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_1 = 2. \end{cases}$

Solución: $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{5} \ , \ x_2 = -\sqrt{5}, \ x_3 = \sqrt{5} \ , x_4 = \sqrt{5} \\ y_1 = -2 \ , y_2 = 2 \ , y_3 = -2 \ , y_5 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ y - x^2 = 0. \end{cases} \quad \rightarrow y = x^2$

$$x - \left(x^2\right)^2 = 0 \text{ Þ } x^4 - x = 0 \text{ Þ } x\left(x^3 - 1\right) = 0$$

$$\text{Þ } x_1 = 0 \ , \ x_2 = 1$$

Luego, $y_1 = 0 \ , \ y_2 = 1$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 0 \ , \ x_2 = 1 \\ y_1 = 0 \ , \ y_2 = 1. \end{cases}$

36. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ 2\log x - \log y = 2\log 2 + \log 3. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3^{2x} + 3^y = 10 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ 2\log x - \log y = 2\log 2 + \log 3. \end{cases}$

$$2\log x - \log y = 2\log 2 + \log 3 \text{ Þ } \log x^2 - \log y = \log 4 + \log 3 \text{ Þ}$$

$$\text{Þ } \log\frac{x^2}{y} = \log 12 \text{ Þ } \frac{x^2}{y} = 12$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ \dfrac{x^2}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 75 - 2x^2 \\ y = \dfrac{x^2}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$75-2x^2=\frac{x2}{12} \Rightarrow 25x^2=900 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=-6$, $x_2=6.$

Luego, $y_1=3$, $y_2=3$

Como log (-6) no corta, entonces el sistema solo tiene la solución: $x=6$, $y=3.$

b) $\begin{cases} 3^{2x}+3^y=10 \\ 4x-y=4 \end{cases} \rightarrow y=4x-4$

Sustituyendo este valor de y en la 1ª ecuación, resulta:

$3^{2x}+3^{4x-4}=10 \Rightarrow 3^{2x}+\frac{3^{4x}}{3^4}=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 81\times 3^{2x}-3^{4x}-810=0$

Haciendo el cambio: $3^{2x}=u.$

$81\times u+u^2-810=0 \Rightarrow u^2+81u-810=0$

$\Rightarrow u_1=-90$, $u_2=9$

Deshaciendo el cambio:

$3^{2x}=-90$, $3x$

$3^{2x}=9 \Rightarrow 3^{2x}=3^2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1.$

Luego, $y=4.1-4=0.$

Solución: $x=1$, $y=0.$

37. Se considera el siguiente sistema formado por una parávola y una recta. Estudia según los valores de a cuándo se cortan en dos puntos, en uno solo o en ninguno.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+a. \end{cases}$$

Igualando antes valores de *y*, resulta:

$x^2=2x+a \Rightarrow x^2-2x-a=0 \Rightarrow$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+4a}}{2}$

$4+4a=0 \Rightarrow a=-1.$

• Si $a=-1$, entonces $x=1.$La ecuación solo tiene una solución y, por tanto, se cortan en un punto (1,1).

• Si $a>-1$, entonces la ecuación tiene dos soluciones y, la xxx, la parábola y la recta se cortarán en dos puntos.

• Si $a<-1$, entonces la ecuación no tiene solución y, por tanto, la parábolay la recta no se cortan en ningún punto.

38. Halla los puntos que tienen en común las elipses:

$4x^2 + 3y^2 = 48$ y $3x^2 + 2y^2 = 35$

Utiliza una calculadora gráfica o algún programa para comprobarlo gráficamente.

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 48 \\ 3x^2 + 2y^2 = 35 \end{cases} \xrightarrow[\text{Método de reducción}]{} \begin{array}{l} \begin{cases} 12x^2 + 9y^2 = 144 \\ 12x^2 + 8y^2 = 140 \end{cases} \\ \hline \qquad y^2 = 4 \end{array}$$

$\Rightarrow y_1 = -2,\ y_2 = 2$

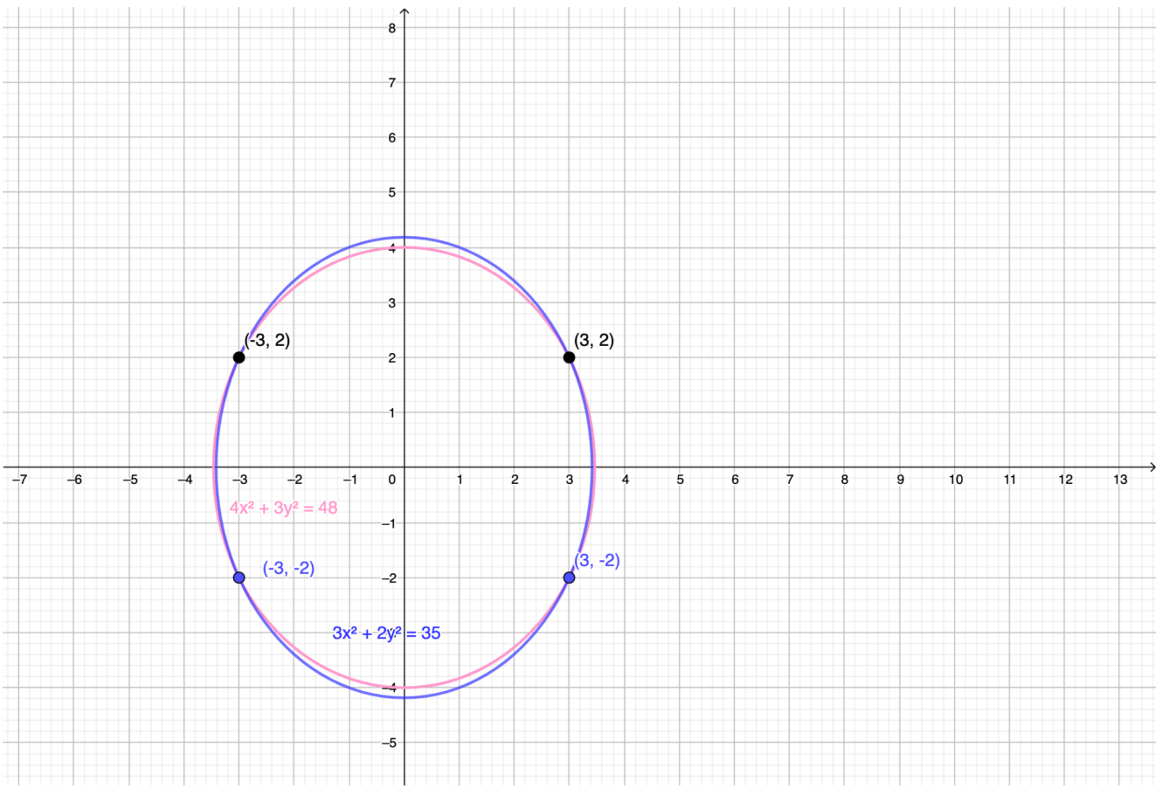
- Si $y_1 = -2$, entonces $4x^2 + 3(-2)^2 = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{11} = -3,\ x_{12} = 3.$

- Si $y_2 = 2$, entonces $4x^2 + 3(2)^2 = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{21} = -3,\ x_{22} = 3.$

Las elipses se cortan en los cuatro puntos siguientes:
(–3, –2), (–3, 2), (3, –2) y (3, 2).



39. Halla los puntos de intersección de la hipérbola $xy = 2$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$. Al unir los puntos obtenidos se obtiene un rectángulo; calcula su área.

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \rightarrow y = \frac{2}{x}$$

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \rightarrow x_1^2 = 1 \\ \rightarrow x_2^2 = 4 \end{matrix}$$

Luego, $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2,\ x_4 = 2.$

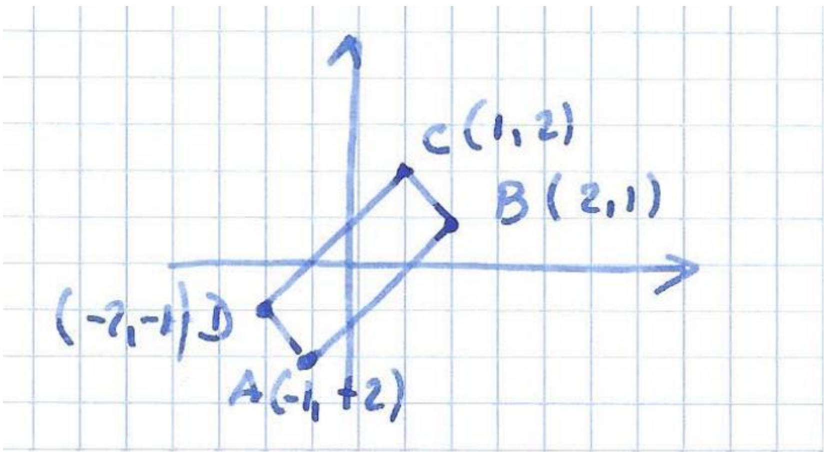
$y_1 = -2,\ y_2 = 2,\ y_3 = -1,\ y_4 = 1.$

La hipérbola y la circunferencia se cortan en los puntos *A* (–1, –2), *B* (2, 1), *C* (1, 2) y *D* (–2, –1).

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Por tanto, el área del rectángulo *ABCD* es:

Área: $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6u^2$



Sistemas de inecuaciones

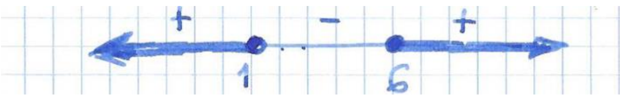
40. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ (x+2)(x-3) > 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3 \leq 2x+1 \leq 1 \\ 1 - x^2 < 0 \end{cases}$

---

a) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ (x+2)(x-3) > 0 \end{cases}$

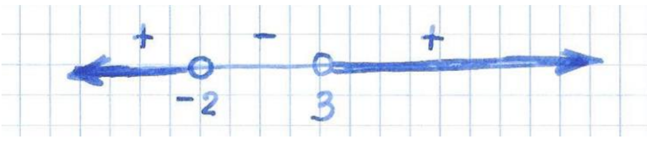
$\bullet x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ y $x_2 = 6.$



Solución: $x \in (-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$

$\bullet (x+2)(x-3) > 0$

$(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ y $x_2 = 3$



Solución: $x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$

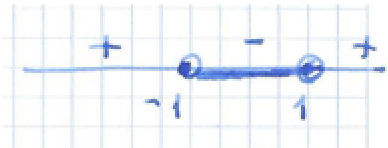
Por tanto, la solución del sistema es la intersección de ambas soluciones. Así:
Solución: $x \in (-\infty, -2)$ U $[6, +\infty)$

b) $\begin{cases} -3 \leq 2x+1 \leq 1 \\ 1 - x^2 < 0 \end{cases}$

- $-3 \leq 2x + 1 \leq 1 \Rightarrow -3 - 1 \leq 2x \leq 1 - 1 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-4}{2} \leq x \leq \frac{0}{2} \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$$

Sol: $x \in (-1, 1)$



Por tanto, la solución del sistema es la intersección de ambas soluciones. Así:
Solución: $x \in (-1, 0]$

41. Halla la solución del sistema de inecuaciones con una incógnita:

$$\begin{cases} \dfrac{7-x}{2}-3<\dfrac{4x-9}{5}-4 \\ \dfrac{5x}{3}-5(x-4)>2(4-x). \end{cases}$$

$$\dfrac{7-x}{2}-3<\dfrac{4x+9}{5}-4 \text{ Þ}$$
$$\text{Þ } 5(7-x)-30<2(4x+9)-40 \text{ Þ}$$
$$\text{Þ } 35-5x-30<8x+18-40 \text{ Þ } -13x<-27 \text{ Þ}$$
$$\text{Þ } 13x>27 \text{ Þ } x>\dfrac{27}{13}$$

Solución: $x\in\left(\dfrac{27}{13},+\infty\right)$

$$\dfrac{5x}{3}-5(x-4)>2(4-x) \text{ Þ}$$
$$5x-15(x-4)>6(4-x) \text{ Þ } 5x-15x+60>24-6x \text{ Þ}$$
$$\text{Þ } -4xZ>-36 \text{ Þ } 4x<36 \text{ Þ } x<9$$

Solución: $x\,\text{Î}\,(-\text{¥},9)$

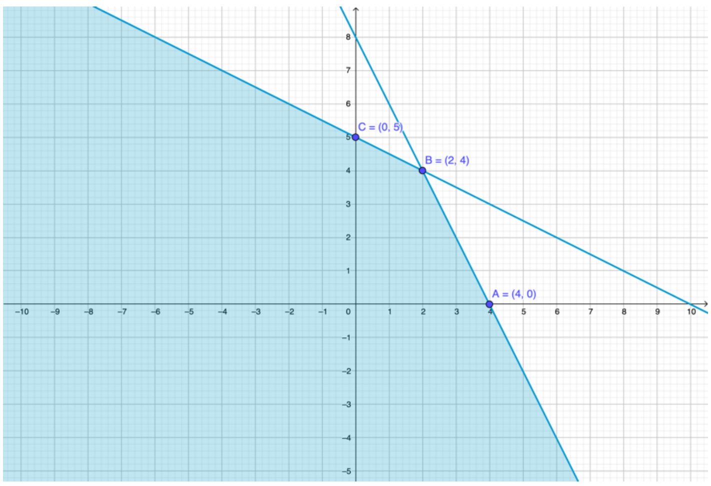
La solución del sistema es: $x\in\left(\dfrac{27}{13},+\infty\right)\cap(-8,9)\Rightarrow$

$$x\in\left(\dfrac{27}{13},9\right)$$

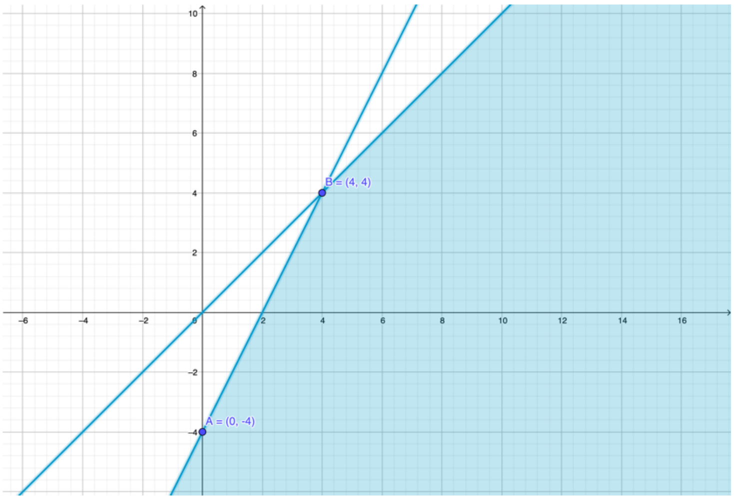
42. Dibuja el recinto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones y halla las coordenadas de los vértices.

a) $\begin{cases} x+2y\le 10 \\ 2x+y\le 8 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ 2x-y\ge 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le 12 \\ x\le 4 \\ y\le 6 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x+2y\le 2 \\ x-y\le 1 \\ x\le y \end{cases}$

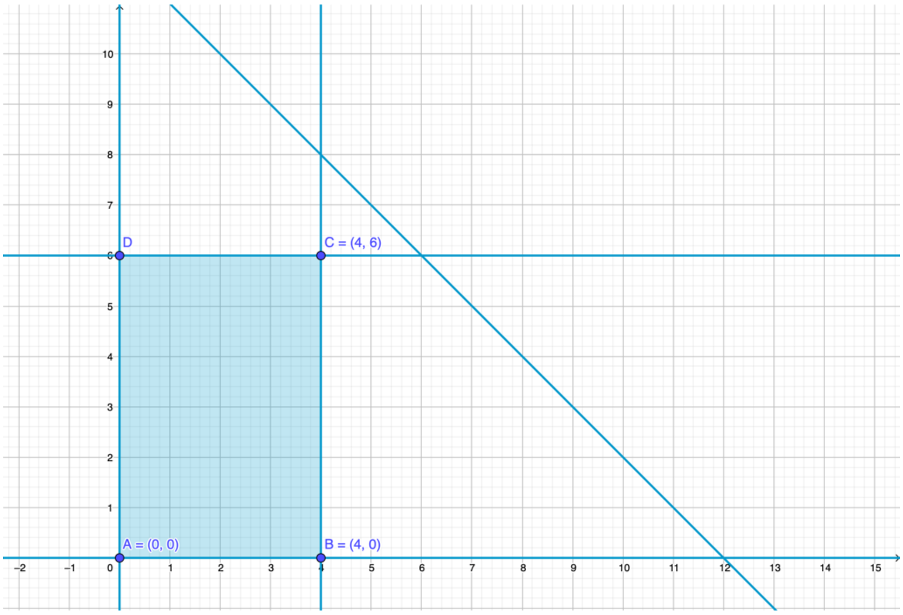
a)



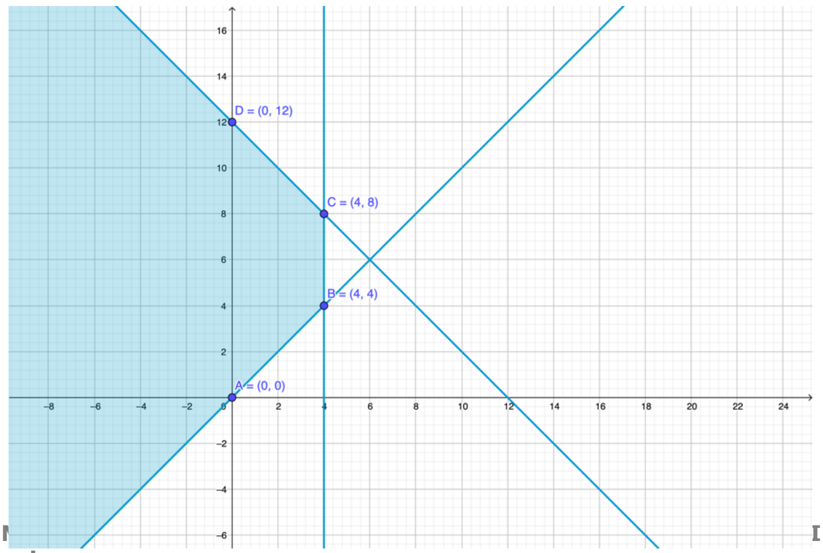
b)



C)



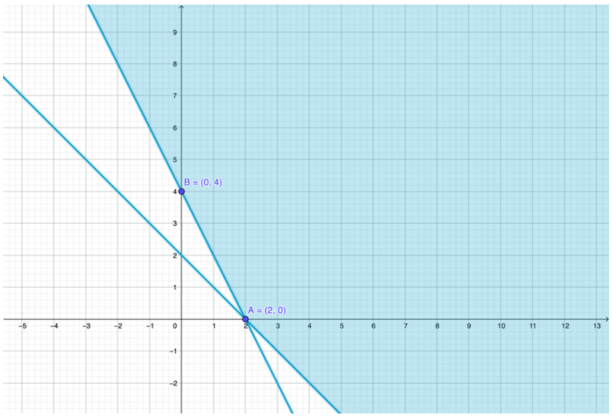
d)



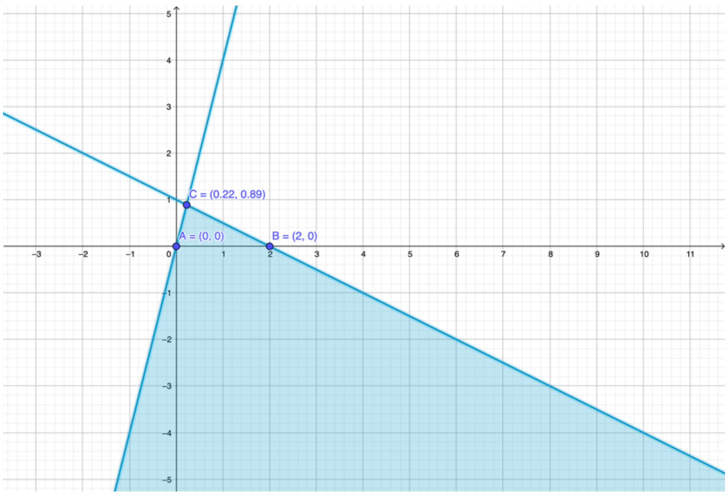
43. Dibuja el recinto solución de los siguientes sistemas de inecuaciones. Halla los vértices y analiza si se trata de una región cerrada o abierta.

$$\boldsymbol{a})\ \begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x + y \geq 2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ 4x - y \geq 0 \end{cases}$$

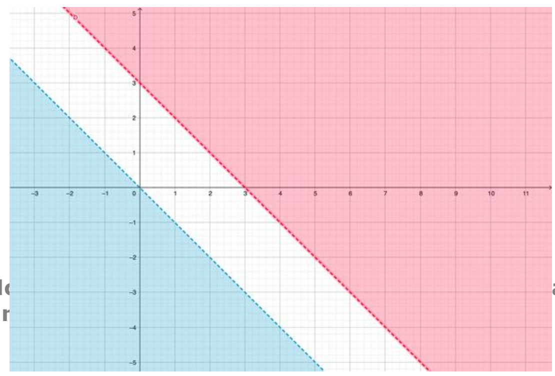
a)



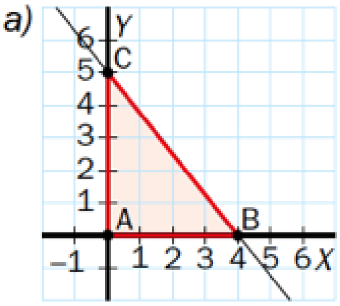
b)

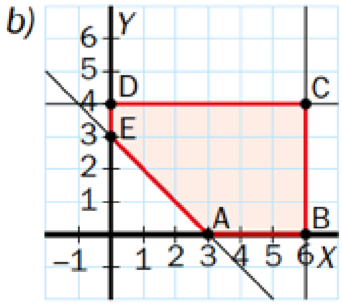


44. Comprueba que el siguiente sistema de inecuaciones no tiene solución: $\begin{cases} x + y < 0 \\ x + y > 3 \end{cases}$



45. Halla un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región de la figura.





a) Se trata de una región del xxxx y, por tanto, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Además es un triángulo delimitado por los vértices *A* (0, 0) , *B* (4, 0) y *C* (0, 5). Así:

$$\frac{y-0}{5-0}=\frac{x-4}{0-4} \Rightarrow \frac{y}{5}=\frac{x-4}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y=5x-20 \Rightarrow 5x+4y=20$$

Como el punto *P* (0, 0) está en la región, entonces la inecuación es de la forma $5x+4y \leq 20$.

Por tanto, el sistema de inecuaciones correspondiente a esa región es:

$$\begin{cases} 5x+4y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

b) En este caso la región está delimitada por el polígono *A* (3, 0) , *B* (6, 0), *C* (6, 4), *D* (0, 4) y *E* (0, 3). Calculamos las tres rectas $\overline{AE}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ del primer cuadrante $(x \geq 0, y \geq 0)$.

- Recta $\overline{AE}$: $\frac{y-0}{3-0}=\frac{x-3}{0-3} \Rightarrow -3y=3x-9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x+3y=9 \Rightarrow x+y=3$

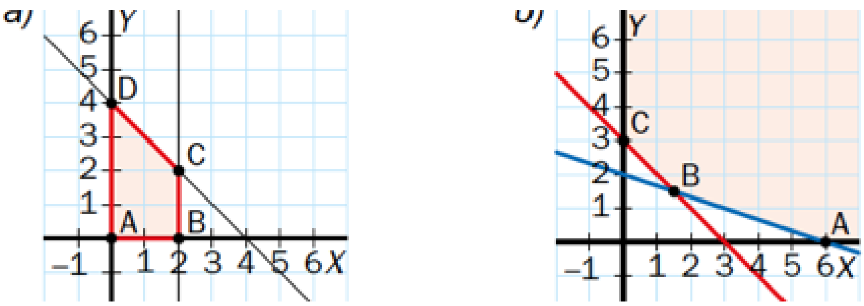
- Recta $\overline{BC}$: $x=6$

- Recta $\overline{CD}$: $y=4$

Por tanto, el sistema que representa a la región de la figura es:

$$\begin{cases} x+y\geq 3 \\ x\leq 6 \\ y\leq 4 \\ x\geq,0,y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\geq 3 \\ 0\leq x\leq 6 \\ 0\leq y\leq 4. \end{cases}$$

46. Halla un sistema de inecuaciones cuya solución sea la región de la figura.



a) La región queda delimitada por el polígono *A* (0, 0) , *B* (2, 0), *C* (2, 2) y *D* (0, 4). Como se encuentra en el primer cuadrante, entonces $x\geq 0,\ y\geq 0$.

La recta $\overline{BC}$ es una linea vertical: $x=2$.

Mientras que la recta $\overline{CD}$ es:

$$\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-0}{2-0}\Rightarrow 2y-8=-2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2y=8\Rightarrow x+y=4.$$

Como el punto (0, 0) pertenece a la región, entonces la inecuación es: $x+y\leq 4$.

El sistema es: $\begin{cases} x+y\leq 4 \\ x\leq 2 \\ x\geq,0,y\geq 0. \end{cases}$

b) Se trata de la región abierta del primer cuadrante de vértices *A*(6, 0), *B* (3/2, 3/2) y *C*(0, 3).

• Recta $\overline{BC}$ corta a los ejes en los puntos (3, 0) y (0, 3) y tiene de ecuación:

$$\frac{y-3}{0-3}=\frac{x-0}{3-0}\Rightarrow 3y-9=-3x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+3y=9\Rightarrow x+y=3$$

• Recta $\overline{AE}$: corta a los ejes en los puntos (6, 0) y (0, 2) y tiene por ecuación:

$$\frac{y-2}{0-2}=\frac{x-0}{6-0}\Rightarrow 6y-12=-2x\Rightarrow$$

Þ $2x+6y=12$ Þ $x+3y=6$

En consecuencia, como el punto P (0, 0) no está en la región las inecuaciones xxx de la forma $x+y$ ³ 3 y $x+3y$ ³ 6.

Así: $\begin{cases} x+y \geq 3 \\ +3 \geq 6 \\ x \geq ,0, y \geq 0. \end{cases}$

APLICACIONES

47. Ejercicio físico. Miguel se mantiene en forma montando en bicicleta y corriendo dos días por semana. El primer día realiza 45 minutos de cada una de las actividades y recorre un total de 24,75 km. Sin embargo, el segundo día hace 30 minutos de bicicleta y corre una hora y suma un total de 23 km. Halla la velocidad media a la que realiza cada una de las actividades, suponiendo que no varía en los dos días.

Sean *x* e *y* las velocidades medias en km/h que lleva Miguel corriendo y en bicicleta, respectivamente.

De la información del enunciado y teniendo en cuenta que $e=v \times t$, resulta el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x \cdot \frac{3}{4} + y \cdot \frac{3}{4} = 24{,}75 & \leftarrow 1^{er}\ día \\ x \cdot 1 + y \cdot \frac{1}{2} = 23 & \leftarrow 2^{o}\ día \end{cases}$$

El sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 3x+3y=99 \\ 2x+y=46 \end{cases} \Rightarrow (-)\begin{cases} x+y=33 \\ 2x+y=46 \end{cases}$$
$$-x=-13 \Rightarrow x=13$$

Luego, $13+y=33$ Þ $y=20$.

Por tanto, lleva una velocidad media corriendo de 13 km/h y en bicileta de 20 km/h.

48. **Tablas de paddle surf.** Mario Board es una empresa que se dedica en temporada de verano a vender un modelo de tabla de paddle surf rígida a un precio de 380 €. Si la empresa tiene unos costes fijos de 14 000 € y unos costes variables de 240 € por tabla que compra a un proveedor:

a) Calcula los costes totales y los ingresos.

b) ¿Cuántas tablas debe vender para obtener beneficios?

a) Los costes fijos son: $C_F=14000$

Los costes variables son: $C_V=240x$

Siendo *x* "el xxx de tabla que compra y vende"

Mientras que los ingresos son: $I=380x$

Por tanto,

Los costes totales son: $C_T = C_F + C_V = 14000 + 240x$

Los ingresos son: $I = 380x$

b) Hemos supuesto que todas las tablas que compra se venden y, por tanto, obtendrá beneficios si los ingresos son mayores que los gastos, es decir:

$I > C_T \Rightarrow 380x > 14000 + 240x \Rightarrow$

$\Rightarrow 140x > 14000 \Rightarrow x > 100$

Por tanto, obtendrá bebeficios si vende más de 100 tablas ni beneficios ni pérdidas con 100 tablas, y tendrá pérdidas si vende menos de 100 tablas.

49. **Videojuegos.** Una empresa de videojuegos exclusivos para la nueva Nintendo Switch OLED Model tiene las siguientes funciones de oferta y de demanda:

$p = -0{,}01x + 30 \leftarrow$ Oferta

$p = 0{,}01x + 10 \leftarrow$ Demanda

donde p es el precio en euros y x el número de unidades de videojuegos.

a) Calcula el precio de equilibrio, es decir, aquel al que se iguala la oferta y la demanda.

b) Dibuja las gráficas de las funciones de oferta y demanda, y explica cuándo se produce exceso de oferta o de demanda.

$p = 0{,}01x + 30 \leftarrow$ oferta

$p = 0{,}01x + 10 \leftarrow$ demanda

a) El precio de equilibrio es aquel que iguala la oferta y la demanda. Así:

$0{,}01x + 30 = 0{,}01x + 10 \Rightarrow 0{,}02x = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{20}{0{,}02} = 1000$

Luego, $p = -0{,}01 \times 1000 + 30 = 20.$

El precio de equilibrio se logra a 20 € con 1000 unidades de videojuegos.

b) Dibujamos las gráficas de oferta y de demanda.

Oferta $\rightarrow p = -0{,}01x + 30$

X	*P*
0	30
3000	0

Demanda $\rightarrow p = 0{,}01x + 10$

X	*P*
0	10
-1000	0

Si $p > 20$, entonces hay un exceso de oferta, es decir, disminuye la demanda.
Pero si $p < 20$, entonces hay un exceso de demanda, es decir, aumenta la demanda.

50. **Frutas.** La demanda y la oferta de kiwis un día determinado en un mercado central vienen dadas por:

$p = -0{,}2x + 5{,}1 \leftarrow$ Oferta
$p = 0{,}1x + 1{,}2 \leftarrow$ Demanda

donde p es el precio en euros y x el número de kiwis en miles de kg.

a) Calcula el precio de equilibrio, es decir, aquel al que se iguala la oferta y la demanda.
b) Dibuja las gráficas de las funciones de oferta y demanda, y explica cuándo se produce exceso de oferta o de demanda.

a) Para hallar el punto de equilibrio que iguala oferta y demanda basta resolver el sistema:

$$\begin{cases} p = -0{,}2x + 5{,}1 \\ p = 0{,}1x + 1{,}2 \end{cases} \Rightarrow -0{,}2x + 5{,}1 = 0{,}1x + 1{,}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}3x = 3{,}9 \Rightarrow x = \frac{3{,}9}{0{,}3} = 13$$

Luego, $p = -0{,}2 \cdot 13 + 5{,}1 = 2{,}5$.
El precio de equilibrio se logra a 2,5 € y con 13000 kg.

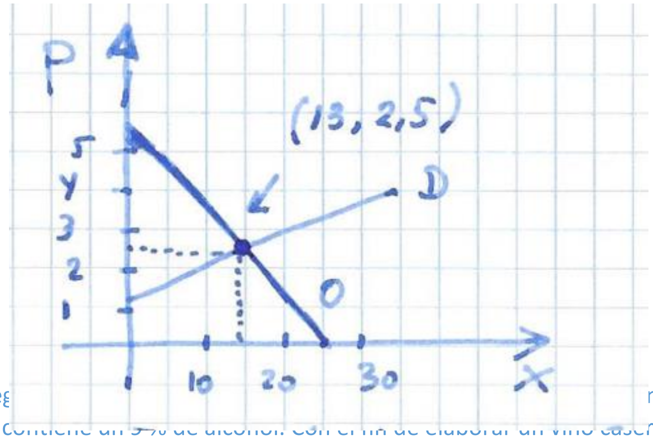
b) Oferta $\rightarrow p = -0{,}2x + 5{,}1$

X	P
0	5,1
3000	0

Demanda $\rightarrow p = 0{,}1x + 1{,}2$

X	P
0	1,2
-12	0

Si el precio $p > 2{,}5$, entonces se produce un exceso de oferta porque disminuye la demanda. Sin embargo, si el precio es inferior a 2,5 €, entonces se produce un exceso de demanda.



51. Mezclas. Una bodeg n vino con un 5 % de alcohol, y el de León c ro, mezclan ambos para obtener 1000 botellas de un litro de vino con el 7 % de alcohol. ¿Cuántos litros de vino de cada viñedo han utilizado en la mezcla?

Designemos por x e y los litros de vino utilizados en la mezcla de los viñedos de Zamora y León, respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 0{,}05x + 0{,}09y = 0{,}07 \cdot 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1000 \\ 5x + 9y = 7000 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y = 1000 - x$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $5x + 9(1000 - x) = 7000 \Rightarrow 4x = 2000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2000}{4} = 500$

Luego, $y = 1000 - 500 = 500$

Deberá, pues, mezclar 500 litros de cada viñedo.

52. Velocidad de una avioneta. Una avioneta vuela con viento a favor a una distancia de 480 km en dos horas. Sin embargo, con viento en contra tarda tres horas en recorren la misma distancia. ¿Cuáles son las velocidades medias de la avioneta y del viento?

Sea x: "velocidad, en km/h, de la avioneta" e
y: "velocidad, en km/h del viento".

Podemos resumir en la siguiente tabla la velocidad, el tiempo y la distancia recorrida con viento a favor y viento en contra.

	Velocidad	Tiempo (h)	Distancia (km)
Viento a favor	$x + y$	2	$2\,(x + y)$
Viento en contra	$x - y$	3	$3\,(x - y)$

Por tanto,

$$\begin{cases} 2(x + y) = 480 \\ 3(x - y) = 480 \end{cases} \Rightarrow (+)\begin{cases} x + y = 240 \\ x - y = 160 \end{cases}$$
$$2x = 400 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 200$

Luego, $y = 240 - 200 = 40$

La velocidad media de la avioneta es de 200 km/h y la del viento de 40 km/h.

53. Índice de masa corporal. Una medida de la obesidad de una persona se determina mediante el índice de masa corporal (IMC), que se obtiene dividiendo el peso (kg) entre el cuadrado de la altura (m). Es decir:

$$IMC = \frac{Peso}{(Altura)^2} \quad kg/m^2$$

El índice de masa corporal del 80 % de las mujeres y de los hombres entre 16 y 35 años se puede modelar en función de la edad, *x,* y el sexo, mediante las expresiones:

IMC = 0,28x + 14,52 (mujeres)

IMC = 0,33x +13,72 (hombres)

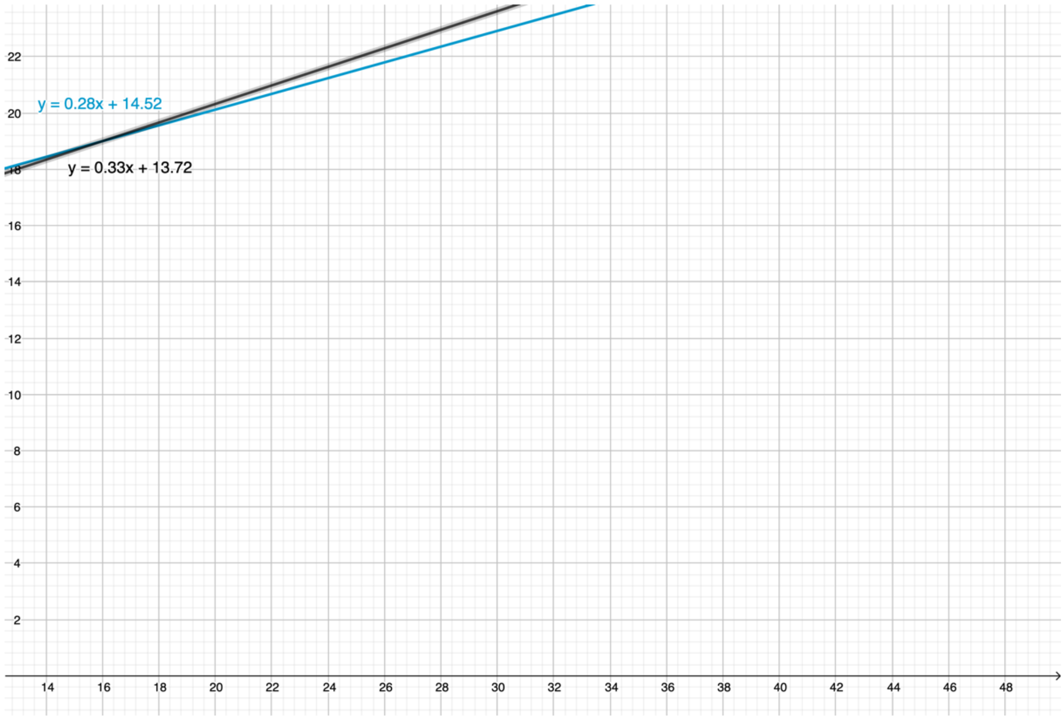
a) Calcula, según este modelo, los índices de masa corporal de las mujeres y de los hombres de 16, 18 y 25 años.

b) Dibuja en ese intervalo de edades las dos rectas de los IMC. ¿A partir de qué edad es superior el de los hombres?

a) En la siguiente tabla hemos reflejado el IMC a los 16, 18 y 25 años.

	16 años	18 años	25 años
IMC (mujeres)	19	19,56	21,52
IMC (hombres)	19	19,66	21,97

b) Es igual a los 16 años, pero a partir de los 17 años ya es superior en los hombres como puede verse en la siguiente gráfica:



54. Resultados electorales. Entre los partidos políticos *A* y *B* obtuvieron el 90 % de los votos en unas elecciones. Calcula el porcentaje de votos que obtuvo cada partido sabiendo que, en las elecciones siguientes, el partido *A* sufrió un descenso de un 10 % en el número de votantes respecto a los comicios anteriores, el partido *B* tuvo un incremento del 10 % en el número de votos respecto a los otros comicios, y, además, entre los dos partidos volvieron a obtener el 90 % del total de votos.

Sean *x* e *y* el porcentaje de votos que obtuvieron en unas elecciones los partidos *A* y *B*, respectivamente. Con los datos del enunciado obtener el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x+y=90 & \leftarrow \text{Elecciones iniciales} \\ 0{,}90x+1{,}10y=90 & \leftarrow \text{Siguientes elecciones} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=90 \\ 9x+11y=900 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y=90-x$

Sustituimos el valor de *y* en la 2ª ecuación:

$$9x+11(90-x)=900 \Rightarrow 2x=90 \Rightarrow x=45$$

Luego, $y=45$.

En las primeras elecciones cada uno de los partidos *A* y *B* obtuvo el 45 % de los votos. Sin embargo, en las siguientes elecciones el partido *A* obtuvo el 40,5 % de los votos y el partido *B* el 49,5 %.

55. Compra de artículos. En una tienda se puede comprar los artículos *A, B* y *C* por un total de diez mil euros. En otra tienda también se pueden adquirir los tres artículos por el mismo precio, si bien en esta los artículos *A* y *B* son un 10 % más caros que en la primera tienda, siendo el artículo *C* un 10 % más barato. ¿Cuál es el precio del artículo *C* en la primera tienda? ¿Cuánto cuestan los artículos *A* y *B* en la segunda tienda?

Designamos por *x*, *y*, *z* los precios en euros de los artículos *A*, *B*, *C*, respectivamente, en la primera tienda. Por tanto,

$$x+y+z=10.000$$

Ahora bien, en la otra tienda los precios de *A* y *B* son un 10 % más caros, es decir, sus precios son 1,10 *x* y 1,10 *y*. Sin embargo, el precio del artículo *C* es un 10 % más barato y, en consecuencia, su precio es 0,90 *z*, Por tanto:

$$1{,}10x+1{,}10y+0{,}90z=10.000.$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z=10.000 \\ 11x+11y+9z=100.000 \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción. Así:

$$\xrightarrow{E_1\to 11E_1}\begin{cases} 11x+11y+11z=110.000 \\ 11x+11y+9z=100.000 \end{cases}$$

Y restando ambas ecuaciones, resulta: $2z=10.000 \Rightarrow z=5.000$

El precio del artículo *C* en la primera tienda es 5.000 €.

Sustituyendo este valor de *z* en la segunda ecuación inicial, queda:

$$1{,}10x+1{,}10y+0{,}90\times 5.000=10.000$$

$$\Rightarrow 1{,}10x+1{,}10y=5.500$$

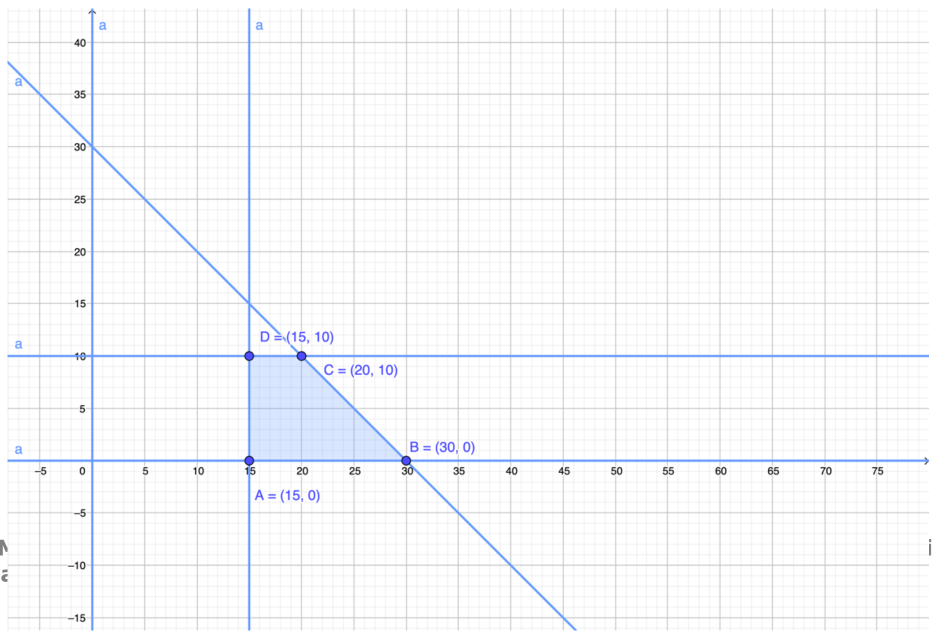
Luego, en la segunda tienda los artículos *A* y *B* cuestan un total de 5.500 € entre los dos.

56. Inversión. Carmen puede invertir, como mucho, 30 000 €. Un asesor financiero le recomienda invertir al menos 15 000 € en una empresa de alquileres turísticos, con lo que obtendrá una rentabilidad anual del 3 %, y como mucho 10 000 € en empresas innovadoras con una rentabilidad anual del 5 %. Plantea un sistema de inecuaciones que permita averiguar las distintas posibilidades de inversión que tiene Carmen. A continuación, dibuja la región factible y halla sus vértices.

Designamos por *x*, *y*, *z* las cantidades en miles de euros que invierte Carmen en alquileres turísticos y en empresas innovadoras, espectivamente.

Entonces, el sistema de inecuaciones a que da lugar el enunciado es el siguiente:

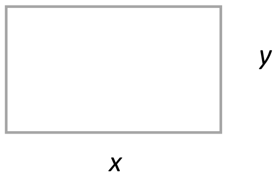
$$\begin{cases} x+y\le 30 & \leftarrow \text{Disponibildad de inversi n} \\ x\ge 15 & \leftarrow \text{Inversi n en empresas tur sticas} \\ y\le 10 & \leftarrow \text{Inversi n en empresas innovadoras} \\ x\ge 0, y\ge 0 & \end{cases}$$



La región factible queda delimitada por los vértices
$A(15,0), B(30,0), C(20,10)$ y $D(15,10)$.

57. Parcela de terreno. Una parcela rectangular tiene 375 m² de superficie. Si uno de sus lados mide el 60 % del otro, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?

Sean *x* e *y* el largo y ancho de la parcela según la figura adjunta.



Con los datos del enunciado tenemos el siguiente sistema de acuaciones no lineales:

$$\begin{cases} x \cdot y = 375 \\ y = 0,60x \end{cases}$$

Sustituimos el valor de *y* de la 2ª ecuación en la 1ª ecuación:

$$x \times (0,60x) = 375 \Rightarrow 0,60x^2 = 375 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{375}{0,60} = 625 \Rightarrow \cancel{x_1 = -25}, x_2 = 25$$

Luego,
$y = 0,6 \times 25 = 15.$

Las dimensiones de la parcela son 25 m de largo y 15 m de ancho.

58. Complemento vitamínico. Una empresa farmacéutica fabrica un complemento vitamínico en comprimidos que contienen 11 unidades de vitamina B12 y 16 unidades de vitamina E. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de principios activos: el primero contiene un 10 % de vitamina B12 y un 20 % de vitamina E, y el otro tiene 30 % de vitamina B12 y 40 % de vitamina E. ¿Cuántas unidades de cada principio activo se deben mezclar en cada comprimido?

Sean *x* e *y* las unidades de cada principio activo, respectivamente, que se deben mezclar en cada líquido.

Del enunciado se deduce el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 0,10x - 0,30y = 11 & \leftarrow \text{Unidades de vitamina B12} \\ 0,20x + 0,40y = 16 & \leftarrow \text{Unidades de vitamina E} \end{cases}$$

Un sistema equivalente es:

$$(-)\begin{cases} x+3y=110 \\ x+2y=80 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad y=30}$$

Luego, $x+2\cdot 30=80 \Rightarrow x=20$

En cada comprimido se tienen que mezclar 20 unidades del principio activo y 30 unidades del segundo.

59. **Jardinería.** Rosa y Jacinto quieren comprar plantas para adornar su pequeño jardín y deciden adquirir tres tipos de plantas a un precio de 7, 10 y 13 €, respectivamente. Si estiman que pueden colocar 15 macetas y se quieren gastar 150 €, ¿qué opciones tienen para realizar la compra?

Sean *x*, *y*, *z* el número de plantas que compran a 7, 10, 13 euros, respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x+y+z=15 & \leftarrow \text{Total de macetas} \\ 7x+10y+13z=150 & \leftarrow \text{Gasto total} \end{cases}$$

$x,y,z \geq 0$, $x,y,z \in Z$

Aplicaremos del metodo de Gauss para resolver el sistema.

$$\xrightarrow{E_2 \to E_2-7E_1} \begin{cases} x+y+z=15 \\ 3y+6z=45 \end{cases}$$

Haciendo $z=\lambda$, entonces $y=\dfrac{45-6\lambda}{3}=15-2\lambda$

Luego, $x+15-2\lambda+\lambda=15 \Rightarrow x=\lambda$.

Solución: $x=\lambda$, $y=15-2\lambda$, $z=\lambda$, $\begin{matrix} \lambda \geq 0 \\ \lambda \in z \end{matrix}$

Así, dando valores a λ obtenemos todas las soluciones posibles.

λ	*x*	*y*	*z*
0	0	15	0
1	1	13	1
2	2	11	2
3	3	9	3
4	4	7	4
5	5	5	5
6	6	3	6
7	7	1	7

Hay, pues, ocho posibles soluciones u opciones de comprar estos tres tipos de plantas.

60. **Influencers.** Tres importantes *influencers* que superan el millón de seguidores y cuyos nombres ficticios son Xen, Yosa y Zico, trabajan fundamentalmente con determinadas empresas que se dedican a vender bailarinas, zapatillas deportivas y tecnología. De ellos, Zico tiene el doble de seguidores que los otros dos juntos. Por otra parte, la mitad de los seguidores de Xen, más el triple de los de Yosa, coinciden con las tres cuartas partes de los seguidores de Zico. Si el número medio de seguidores de los tres *influencers* es de seis millones, averigua cuántos seguidores tiene cada uno.

Sean *x*, *y*, *z* el número de seguidores (en millones) de Xen, Yosa y Zico, respectivamente. *x*, *y*, $z \geq 0$, *x*, *y*, $z \in \mathbb{Z}$.

Del enunciado deducimos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} z = x + y \\ \dfrac{x}{2} + 3y = \dfrac{3}{4}z \\ \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 12y - 3z = 0 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$$

Mediante el método de Gauss:

$$\xrightarrow[E_3 \to E_3 - E_1]{E_2 \to E_2 - 2E_1} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 10y - z = 0 \\ 2z = 18 \end{cases}$$

Solución: $z = 9$, $y = 0{,}9$, $z = 8{,}1$.
Por tanto, Xen tiene 8,1 millones de seguidores, Yosa 90000 seguidores y Zico posee 9 millones de seguidores.

61. Astronomía. La órbita de un planeta está descrita por la elipse $4x^2 + y^2 = 16$. Por otra parte, un cometa se desplaza siguiendo la trayectoria parabólica $y = x^2 - 4$. Encuentra en qué puntos pueden intersecarse. Compruébalo gráficamente utilizando GeoGebra.

Para hallar los posibles puntos de intersección resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

Sustituimos el valor de *y* de la 1ª ecuación en la 1ª:

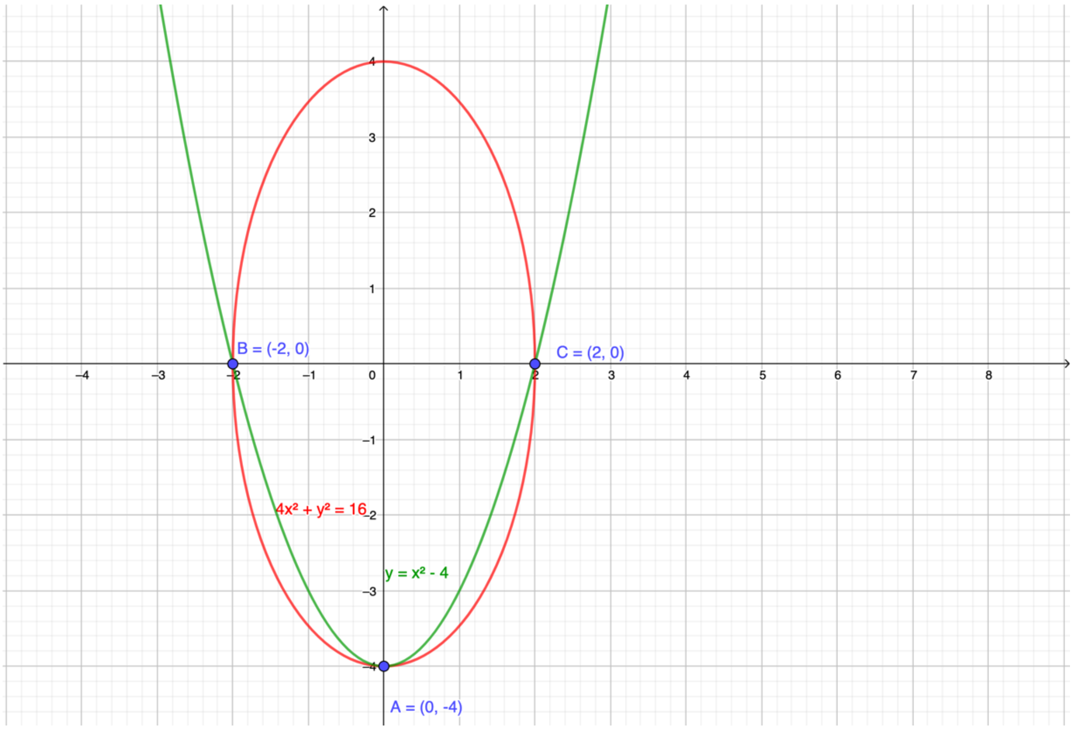
$$4x^2 + \left(x^2 - 4\right)^2 = 16 \Rightarrow 4x^2 + x^4 - 8x^2 + 16 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^2 = x^2\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = 2.$$

Luego,

$$y_1 = -4,\ \ y_2 = 0,\ \ y_3 = 0$$

Es decir: los puntos de contacto son *A* (0, – 4), *B* (–2, 0) y *C* (2, 0).

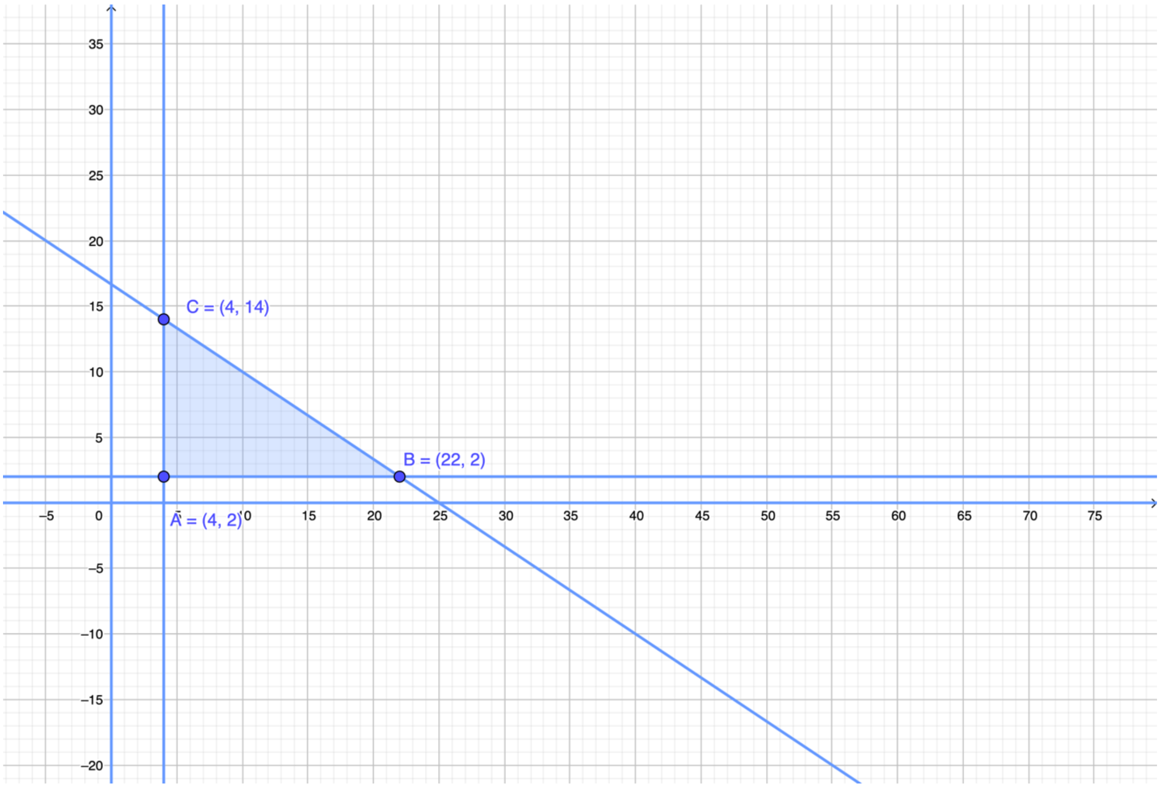


62. Venta de ordenadores portátiles. Un almacén vende dos modelos de ordenadores portátiles. Debido a la demanda, tiene un stock de al menos tantas unidades del modelo *A* como del modelo *B*. El coste de almacenaje de los modelos *A* y *B* es de 400 y 600 €, respectivamente. El gerente no quiere tener más de 10 000 € en inventario y, además, para poder atender a la demanda de manera rápida mantiene al menos 4 ordenadores del modelo *A* y 2 del modelo *B*. Encuentra un sistema de inecuaciones que describa las posibilidades de inventario de este almacén. Después, halla los vértices de la región factible.

Sean x = "número de vidas del modelo A" e y = "número de vidas del modelo B".

El sistema de inecuaciones que permite averiguar las distintas posibilidades del inventario de este almacen es el siguiente:

$$\begin{cases} 400x+600y\le 10000 & \leftarrow \text{Disponibilidad de almacenaje en euros} \\ x\ge 4 & \leftarrow \text{Modelos almacenados del A} \\ y\ge 2 & \leftarrow \text{Modelos almacenados del B} \\ x\ge 0, y\ge 0., x, y\in z. & \end{cases}$$



La región factible está delimitada por el triangulo de vértices A (4, 2), B (22, 2) y C (4, 14).

63. Nutrición. Una dieta requiere diariamente al menos 300 calorías, 36 unidades de vitamina A y 90 unidades de vitamina C. Un vaso de una bebida vegetal X tiene 60 calorías, 12 unidades de vitamina A y 10 unidades de vitamina C. Un vaso de otra bebida vegetal Y tiene 60 calorías, 6 unidades de vitamina A y 30 unidades de vitamina C.

a) Plantea un sistema de inecuaciones que describa el número de vasos de cada una de esas bebidas que debe tomar como mínimo para cumplir los requerimientos.

b) Un nutricionista recomienda a una persona que diariamente tome 6 vasos de la bebida X y un vaso de la bebida Y. Utiliza la región factible para verificar si esta combinación cumple los requisitos mínimos diarios.

Con la información del enunciado podemos construir la tabla siguiente:

	Calorías	Vitamina A	Vitamina C
Bebida vegetal *X*	60	12	10
Bebida vegetal *Y*	60	6	30
Total	300	36	90

Designar por *x* e *y* el número de vasos de las bebidas vegetales *X* e *Y*, respectivamente.

a) El sistema de inecuaciones que describe el número de vasos de cada uno de esas bebidas que se deben tomar, es el siguiente:

$$\begin{cases} 60x+60y\geq 300 \\ 12x+6y\geq 36 \\ 10x+30y\geq 90 \\ x,y\geq 0, x, \quad y\in z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\geq 5 \\ 2x+y\geq 6 \\ x+3y\geq 9 \\ x,y\geq 0, \quad x,y\in z. \end{cases}$$

b) La región factible es abierta y tiene por vértices A (9, 0), B (3, 2), C (1, 4) y D (0, 6).

Como se puede comprobar la combinación de 6 vasos de la bebida *X* y un vaso de la bebida *Y*, es decir, el punto (6, 1) está en la región factible y por tanto, cumple los requisitos mínimos diarios.