3 Polinomios, ecuaciones e inecuaciones

1 Expresiones algebraicas y polinomios

1. Calcula el valor numérico del polinomio para $x = -1$ y $x = 3$. ¿Podrías encontrar algún otro valor de para el que el valor numérico del polinomio sea cero?

$$P(-1) = 0$$
$$P(3) = 0$$

2. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - x - 4$ y $Q(x) = x^2 + x + 2$, calcula las operaciones siguientes:

   a) $P(x) + Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2$

   b) $P(x) - Q(x) = 2x^3 - x^2 - 2x - 6$

   c) $2P(x) + x \cdot Q(x) = 5x^3 + x^2 - 8$

   d) $P(x) \cdot Q(x) = 2x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 8$

   e) $P(x) : Q(x)$ Cociente: $2x - 2$ y resto: $-3x$

   f) $P(x) : (x - 2)$ Cociente: $2x^2 + 4x + 7$ y resto: 10 .

3. Calcula las siguientes divisiones utilizando el algoritmo de Ruffini:

   a) $\left(3x^3 - 5x^2 + 3x - 2\right) : \left(x + 3\right)$ Cociente: $3x^2 - 14x + 45$ y resto: -137 .

   b) $\left(5x^5 + x^2 - 3\right) : \left(x - 1\right)$ Cociente: $5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6$ y resto 3.

4. ¿Cuál debe ser el valor de m y n para que el polinomio $3x^4 - x^3 + mx^2 + nx + 1$ tenga como raíz $x = 1$ y arroje un resto igual a 23 cuando se divide entre $(x - 2)$?

   $m = -6, n = 3$

   El polinomio que cumple las condiciones es $3x^4 - x^3 - 6x^2 + 3x + 1$

5. Calcula los siguientes productos aplicando las identidades notables:

   a) $(3x - 2)^2$ — $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

   b) $(5x - 2y)^2$ — $(5x - 2y)^2 = 25x^2 - 20xy + 4y^2$

   c) $\left(3x^2 + 2\right) \cdot \left(3x^2 - 2\right)$ — $\left(3x^2 + 2\right) \cdot \left(3x^2 - 2\right) = 9x^4 - 4$

2 Factorización de polinomios

6. Factoriza los siguientes polinomios:

   a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ — $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x + 3)(x - 2)(x + 2)$

   b) $4x^3 + 4x^2 - x - 1$ — $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 4(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) $3x^3+2x^2-7x+2$ $\quad 3x^3+2x^2-7x+2=3(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

d) $2x^4+9x^3-18x^2-71x-30$

$2x^4+9x^3-18x^2-71x-30=2(x+2)(x+5)(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

e) $x^3+4x^2-3x-18$ $\quad x^3+4x^2-3x-18=(x-2)(x+3)^2$

f) $4x^4-25x^2+36$ $\quad 4x^4-25x^2+36=4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)(x+2)$

g) $4x^3-7x+3$ $\quad 4x^3-7x+3=4(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

h) $20x^3-8x^2-5x+2$ $\quad 20x^3-8x^2-5x+2=20\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

7. ¿Cuántos factores puede tener como máximo un polinomio de grado 3? ¿Y de grado 4? ¿Y de grado n? Investiga en qué consiste el Teorema Fundamental del Álgebra.

Para que el grado del polinomio sea 3, deberá tener, como mucho, 3 factores. El mismo razonamiento se puede aplicar para polinomios de grado 4, y en general, para polinomios de cualquier grado.
Un polinomio de grado n tendrá, a lo sumo, n factores de la forma $(x-a)$.

8. Calcula el valor de m para que el polinomio $x^3-3x^2+mx+12$ tenga como raíz $x=3$. Calcula su descomposición factorial.

$m=-4$

3 Expresiones racionales

9. Realiza las siguientes operaciones, simplificando su resultado:

a) $\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}-\frac{x}{x^2-9}$

$$\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}-\frac{x}{x^2-9}=\frac{2x+3}{(x-3)(x+3)}$$

b) $\frac{x+1}{x^2-5x+4}\cdot\frac{x-4}{x^2-1}$

$$\frac{x+1}{x^2-5x+4}\cdot\frac{x-4}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

c) $\frac{x^2}{x^2-x-2}:\frac{x^2-4}{x+1}$

$$\frac{x^2}{x^2-x-2}:\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{x^2}{(x-2)^2(x+2)}$$

d) $\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right):\dfrac{2}{x^2-1}$

$\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right):\dfrac{2}{x^2-1}=2$

10. Calcula el dominio de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2}{x+3}$ $\qquad \mathrm{Dom}=(-\infty,3)\cup(3,\infty)$

b) $\dfrac{x-3}{x^2-4}$ $\qquad \mathrm{Dom}=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

c) $\dfrac{5x-1}{x^2+x+1}$ $\qquad \mathrm{Dom}=\mathbb{R}$

11. Simplifica las siguientes expresiones racionales:

a) $\dfrac{2x+2}{x+1}$ $\qquad \dfrac{2x+2}{x+1}=2$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ $\qquad \dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ $\qquad \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-1}$

4 Binomio de Newton

12. Obtén los desarrollos correspondientes a partir de la fórmula del binomio de Newton y utilízalo para calcular la potencia especificada:

a) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

b) $\left(\sqrt{x}-3\right)^4=(\sqrt{x})^4-4(\sqrt{x})^3 3+6(\sqrt{x})^2\cdot 3^2-4\sqrt{5}3^3+3^4=x^2-12x\sqrt{x}+54x-108\sqrt{x}+81$

c) $(2x+3)^4=16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$

d) $\left(x^2+1\right)^2=x^4+2x^2+1$

13. Calcula el número combinatorio $\binom{7}{2}$. ¿Cuánto valdrá el número simétrico $\binom{7}{5}$? ¿Se cumple esto siempre?

$\binom{7}{2}=21$ y también $\binom{7}{5}=21$

5 Ecuaciones

14. Localiza el error:

$$x=2 \xrightarrow{\text{por } x} x^2=2x \xrightarrow{\text{resta } 4} x^2-4=2x-4 \xrightarrow{\text{fact}}$$
$$\xrightarrow{\text{fact}} (x-2)(x+2)=2(x-2) \xrightarrow{\text{simplif.}} x+2=2 \rightarrow x=0$$

En realidad, hay dos pasos donde se cambian la ecuación por otra no del todo equivalente.

Al multiplicar la ecuación por x en el primer paso, se introduce como solución $x=0$. Los demás pasos son del todo correctos hasta que en el penúltimo paso se simplifica dividiendo la ecuación entre $x-2$. Esto hace que se elimine de la ecuación la solución $x=2$, por lo que la única solución es ahora $x=0$

15. Indica si los valores indicados son soluciones de las ecuaciones:

a) $2^x=4;\ x=2,\ x=-2$

$x=2 \rightarrow$ SI es solución.
$x=-2 \rightarrow$ NO es solución.

b) $\sqrt{x^2-7e^x+2}=4;\ x=-4$

NO es solución

16. De las parejas de ecuaciones, indica cuáles son equivalentes y cuáles no.

a) $x=2;\ x^3=8$

Son equivalentes.

b) $3^x=81;\ \log(2x+2)=1$

Son equivalentes.

c) $2x-4=x+9;\ 5x+2=3x-1$

No son equivalentes

d) $x^3-4x^2+x\cdot 2^x=0;\ x^2-4x+2^x=0$

No son equivalentes.

6 Ecuaciones de primer y segundo grado

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x+\frac{8}{7}=0$ $\qquad$ $2x+\frac{8}{7}=0 \rightarrow x=\frac{-4}{7}$

b) $\left(3x-\frac{x-2}{5}\right)\cdot\left(x+4\right)=0$

$\left(3x-\frac{x-2}{5}\right)\cdot\left(x+4\right)=0 \rightarrow x=\frac{-1}{7}\ ;\ x=-4$

c) $\frac{\left(x+1\right)}{3}-\frac{\left(3x+5\right)}{6}=1$

$\frac{\left(x+1\right)}{3}-\frac{\left(3x+5\right)}{6}=1 \rightarrow x=-9$

d) $5-\frac{\left(x+2\right)}{4}=x-\frac{1}{2}$

$5-\frac{\left(x+2\right)}{4}=x-\frac{1}{2} \rightarrow x=4$

e) $3x^2-75=0$

$3x^2-75=0 \rightarrow x=\pm 5$

f) $x^2-4x=x(2x+4)$

$x^2-4x=x(2x+4) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-8 \end{cases}$

g) $3\left(x-2\right)-2\left(5x+8\right)=0$

$3\left(x-2\right)-2\left(5x+8\right)=0 \rightarrow x=\frac{22}{7}$

18. Determina el valor de k para que la ecuación $x^2+kx+3=0$ tenga dos soluciones.

Para que la ecuación tenga dos soluciones, su discriminante deberá ser positivo:

$$\Delta=k^2-12>0 \quad k\in(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},\infty)$$

19. Determina el valor de k para que la ecuación $x^2+2x+k=0$ no tenga solución.

Para que la ecuación no tenga solución, su discriminante deberá ser negativo:

$$x^2+2x+k=0\rightarrow 4-4k<0\rightarrow 4<4k\rightarrow k>1\rightarrow k\in\left(1,\infty\right)$$

20. Calcula las dimensiones de un rectángulo de diagonal 13 cm cuya base es 7 cm más grande

que su altura.

La altura del rectángulo mide 5 cm y su altura 12 cm.

7 Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2

21. Calcula el valor de k para que la ecuación $3x^3-x^2+kx+4=0$ tenga como solución $x=-2$. Para ese valor de k encuentra las otras soluciones.

Para $k=-12$ se sacan las otras soluciones, $x=-2$, $x=2$, $x=1/3$

22. Halla las soluciones de la ecuación $(x-1)^4-5(x-1)^2+4=0$ utilizando previamente el cambio de variable $y=x-1$.

Soluciones: $x = 2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = -1$

23. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-4x^2+3=0$
$x^4-4x^2+3=0 \rightarrow\ x=\pm\sqrt{5}$, $x=\pm 1$

b) $2x^4-11x^2+5=0$
$2x^4-11x^2+5=0 \rightarrow\ x=\pm\sqrt{5}$, $x=\pm\sqrt{2}/2$

c) $(x^2+1)x^2=5(2x^2-4)$
$(x^2+1)x^2=5(2x^2-4) \rightarrow\ x=\pm\sqrt{5}$, $x=\pm 2$

d) $x^3-2x^2+x=0$
$x^3-2x^2+x=0 \rightarrow x = 0, x = 1$

e) $(3x+2)(x^2-4x)(x^2-9)=0$
$(3x+2)(x^2-4x)(x^2-9)=0 \rightarrow\ x=-2/3$, $x=\pm 3$, $x = 0$, $x = 4$

f) $x^3-4x^2+x+6=0$
Las soluciones de la ecuación son $x=-1, x=2, x=3$

8 Ecuaciones racionales

24. Dos grifos tardan dos horas en llenar un depósito de agua. Si se llena utilizando solo uno de los grifos se sabe que el segundo grifo tarda tres horas más que el primero. ¿Cuánto tiempo tardará cada grifo en llenar el depósito?

El primero tarda 3 horas y el segundo tarda 6h.

25. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=1$

$\frac{2x}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=1 \rightarrow x=-1$

b) $\frac{x-2}{x}+\frac{1}{x-1}=1$

$\frac{x-2}{x}+\frac{1}{x-1}=1 \rightarrow x=2$

c) $\frac{3}{x^2-6x+8}+\frac{x-5}{x^2-5x+4}=\frac{1}{x-4}$

$\frac{3}{x^2-6x+8}+\frac{x-5}{x^2-5x+4}=\frac{1}{x-4} \rightarrow x=5$

d) $\frac{1-x}{x+3}=\frac{2-x}{x+1}$

$\frac{1-x}{x+3}=\frac{2-x}{x+1} \rightarrow x=5$

9 Ecuaciones con radicales

26. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+7}+5=x$

$\sqrt{x+7}+5=x \rightarrow x=9$

b) $x+2=-4\sqrt{x-1}$

Esta ecuación no tiene solución.

c) $x-\sqrt{2x+3}=6$

$x-\sqrt{2x+3}=6 \rightarrow x=11$

d) $\sqrt{5x+6}-2x=3$

$\sqrt{5x+6}-2x=3 \rightarrow x=-1$, $x = -3/4$

e) $\sqrt{x+4}=1+\sqrt{x-3}$
$\sqrt{x+4}=1+\sqrt{x-3} \to x = 12$

f) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$
$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2 \to x = 7$

27. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación: $x+3\sqrt{x-1}=-1$?
La ecuación no tiene solución.

28. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{3x+\sqrt{x+1}}=7$

$\sqrt{3x+\sqrt{x+1}}=7 \to x = 15$

b) $\sqrt[3]{x+1}+5=x$

$\sqrt[3]{x+1}+5=x \to x=7$

29. Encuentra un número al que, si le quitas 10 unidades, obtienes la raíz cuadrada del número más 10 unidades.

El número buscado es 15.

10 Ecuaciones logarítmicas

30. Sonido. El nivel de intensidad de un sonido se mide en decibelios (dB) y se calcula con la expresión $\beta=10\cdot\log\left(I/I_0\right)$ donde I es la intensidad del sonido, y $I_0=10^{-12}\,W/m^2$ es la intensidad umbral de audición. ¿Qué intensidad tendrá un sonido cuyo nivel sea igual al umbral del dolor (140 dB)? Si una persona habla en voz alta, su sonido tiene una intensidad 500 veces mayor que cuando susurra. ¿Qué diferencia en dB habrá entre los niveles de intensidad de ambos sonidos?

Hay unos 14 dB de diferencia entre susurrar y hablar en voz alta.

31. Resuelve las ecuaciones siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(2x+4)=2$

$\log(2x+4)=2 \rightarrow x=48$

b) $\log(x+5)+\log(3x+5)=\log(48)$

$\log(x+5)+\log(3x+5)=\log(48) \rightarrow x=1$

c) $\log_3(x)+\log_9(x)=3$

$\log_3(x)+\log_9(x)=3 \rightarrow x=9$

d) $\log_x(5)+\log_{1/x}\left(\sqrt{5}\right)=\log_x\left(\sqrt{x}\right)$

$\log_x(5)+\log_{1/x}\left(\sqrt{5}\right)=\log_x\left(\sqrt{x}\right) \rightarrow x=5$

e) $\log_2(x)=\log_8(x^2+2x)$

$\log_2(x)=\log_8(x^2+2x) \rightarrow x=2$.

f) $\log(5-x)+2\log(x)=\log(12)$

$\log(5-x)+2\log(x)=\log(12) \rightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$; $x=2$

11 Ecuaciones exponenciales

32. Beneficios empresariales. Los beneficios de una empresa crecen de forma exponencial. Sin embargo, si en un momento dado la empresa tiene unos recursos limitados o se enfrenta a un fuerte competidor, estos beneficios se ajustan a la ecuación $N=\dfrac{200}{1+e^{-t}}$ (millones de euros), donde el tiempo está medido en años. ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que los beneficios lleguen a 198 millones de euros?

Tendrá que pasar 4,595 años.

33. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^x=12$

$3^x=12 \rightarrow x=\log_3 12=\dfrac{\log 12}{\log 3}$

b) $3^{2x-5}=27$

$3^{2x-5}=27 \rightarrow x=4$

c) $5^{x^2-x}=25$

$5^{x^2-x}=25 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

d) $2^{x-1}+3\cdot 2^x-2^{x+1}=24$

$2^{x-1}+3\cdot 2^x-2^{x+1}=24 \rightarrow x=4$

e) $2\cdot 3^{1-x}+3^{x-1}=3^{x}$
$2\cdot 3^{1-x}+3^{x-1}=3^{x} \to x=1$

f) $9^{x-2}+3^{x+1}=90$
$9^{x-2}+3^{x+1}=90 \to x=3$

g) $2^{2x-1}+2^{x}=5\cdot 2^{3}$
$2^{2x-1}+2^{x}=5\cdot 2^{3} \to x=3$

h) $2^{x}-4^{x+2}-2^{-2}=-1$
$2^{x}-4^{x+2}-2^{-2}=-1 \to x=-2$

12 Inecuaciones de primer grado

34. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $2x-3>4x+5$
La solución es: $x<-4 \to x\in(-\infty,-4)$

b) $2(x-3)\le x+3(x+4)$
La solución es: $x\ge -9 \to x\in[-9,\infty)$

c) $\frac{x-1}{3}+\frac{x+3}{2}<2(x+1)$
Las soluciones son: $x>-5/7 \to x\in(-5/7,\infty)$

d) $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{5(x-8)}{4}\ge \frac{x}{2}$
Las soluciones son: $x\le 128/13 \to x\in(-\infty,128/13]$

35. Precisión de balanza. En una tienda de caramelos compras unas gominolas al peso que cuestan 10 €/kg. La balanza que utilizan para pesar tiene un sello de certificación que afirma que la balanza tiene una precisión de 5 gramos. Según la balanza, has comprado 300 g de gominolas que te han costado 3 €. ¿Cuánto te han cobrado de más o de menos?

Han cobrado de más o de menos 5 céntimos.

13 Inecuaciones de segundo grado o superior

36. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $(3x-2)\cdot(x-1)<0$

Las soluciones son el intervalo $x\in(2/3,1)$.

b) $x^2+3x-4\leq 0$

Las soluciones son el intervalo $x\in[-4,1]$.

37. La inecuación $x^2+x+1>0$ tiene una solución inusual. Calcula su solución.

La solución es toda la recta real: $x\in(-\infty,\infty)$.

14 Inecuaciones racionales

38. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

a) $\dfrac{x+2}{x-3}<0$

Las soluciones son $x\in(-2,3)$.

b) $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}\leq 0$

Las soluciones son $x\in(-\infty,-1)\cup[2,3]$

c) $\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+9}>0$

Las soluciones son $x\in(-\infty,-2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$

d) $\dfrac{x-4}{4-x^2}>0$

Las soluciones son $x\in(-\infty,-2)\cup(2,4)$

e) $\dfrac{x-4}{x^2-6x+9}>\dfrac{4}{9}$

Las soluciones son $x\in(0,3)\cup(3,15/4)$

f) $\frac{x}{x+1} \le \frac{x+2}{x}$

Las soluciones son $x \in \left(-1,-2/3\right] \cup \left(0,\infty\right)$

39. Beneficios. El beneficio estimado de un nuevo producto que va a salir al mercado sigue la ley $B = 30t/(t^2+1)$ (en miles de euros), siendo t el tiempo en meses desde que se lanza el producto al mercado. El departamento de producción afirma que el coste de fabricación es de 1000 € por cada mes que se fabrique. Calcula cuándo el coste de producción será mayor que los beneficios del producto.

El beneficio estará por debajo de los costes de producción al principio ($t \in (0, 0{,}033)$ días) y tiempo después $t \in (29{,}967, \infty)$ días .

15 Resolución de problemas

40. Salarios. Una proyección a futuros de una empresa financiera prevé un crecimiento medio de los salarios del 3% anual hasta el año 2030, y un aumento de los beneficios en la venta del 1% anual. Si la empresa tiene un coste salarial de 3 millones de euros y un beneficio en ventas de 4 millones de euros, ¿cuánto tiempo tardarán en igualarse ambas cantidades? Identificar la variable:

Tardará 14,67 años.

41. Entradas a un parque temático. Un parque temático ofrece dos tipos de entrada, la entrada A que cuesta 50 € la entrada y 0,20 € cada atracción en la que se monte, y la entrada B que cuesta 20 € y 0,80 € cada atracción. ¿Cuántas atracciones deberemos disfrutar para que sea más rentable la entrada A?

Deberemos montar en más de 50 atracciones si queremos que salga más rentable la entrada A que la B.

Actividades finales

Expresiones algebraicas y polinomios

42. Calcula el valor numérico de los polinomios indicador para los valores de las variables que se indican:

a) x^2-3x+2 para $x=-2$ Valor numérico: 12

b) $\dfrac{x^2+x-2}{\ln(x+2)}$ para $x=-1$ Valor numérico: $\dfrac{-2}{0}$ no está definido

c) $\sqrt{x^2+2^x}$ para $x=-4$ Valor numérico: $\sqrt{\dfrac{257}{16}}$

d) x^2+2y^3 para $x=2$ **e** $y=-2$ Valor numérico: -12

43. Dados los polinomios $P(x)=2x^3+x^2-2x+1$ y $Q(x)=x^4+3$, calcula las siguientes operaciones:

a) $P(x)+Q(x)$ $P(x)+Q(x)=x^4+2x^3+x^2-2x+4$

b) $P(x)-Q(x)$ $P(x)-Q(x)=-x^4+2x^3+x^2-2x-2$

c) $P(x)\cdot Q(x)$ $P(x)\cdot Q(x)=2x^7+x^6-2x^5+x^4+6x^3+3x^2-6x+3$

44. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $3(x-2)^2-(x+3)(x+2)$

$3(x-2)^2-(x+3)(x+2)=2x^2-17x+6$

b) $(y+2)(y^2-1)-6(y+3)(y+1)^2$

$(y+2)(y^2-1)-6(y+3)(y+1)^2=-5y^3-28y^2-43y-20$

c) $\left(\dfrac{2}{5}m-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{5}m+\dfrac{1}{2}\right)-m^2$

$$\left(\frac{2}{5}m-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}m+\frac{1}{2}\right)-m^2=-\frac{19}{25}m^2-\frac{1}{10}m-\frac{1}{4}$$

d) $(4x^2-3x+2)^2$

$(4x^2-3x+2)^2=16x^4-24x^3+25x^2-12x+4$

45. Realiza las siguientes divisiones de polinomios indicando su cociente y su resto:

a) $\left(3x^4-2x^3+4x^2-3x+1\right):\left(x^2+2x-2\right)$

Cociente: $3x^2-8x+26$
Resto: -71 x+53

b) $\left(6x^4+7x^3-11x^2-1\right):\left(2x^2+3x-2\right)$

Cociente: $3x^2-x-1$
Resto: x-3

c) $\left(3x^5-6x^4+3x^3-2x^2+x-4\right):\left(x^2+x-2\right)$

Cociente: $3x^3-9x^2+18x-38$
Resto: $75x-80$

d) $\left(2x^4+x^3-4x^2+2x+1\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Cociente: $2x^3-4x+4$
Resto: -1

46. Realiza las siguientes divisiones de polinomios aplicando la regla de Ruffini, indicando su cociente y su resto:

a) $\left(2x^3+5x^2-3x+1\right):\left(x+1\right)$

Cociente: $2x^2+3x-6$
Resto: 7

b) $\left(3x^4-2x^3+5x^2+2x+1\right):\left(x+3\right)$

Cociente: $3x^3-11x^2+38x-112$
Resto: 337

c) $\left(3x^5-6x^4+3x^3-2x^2+x-4\right):\left(x-2\right)$

Cociente: $3x^4+3x^2+4x+9$
Resto: 14

d) $\left(2x^4+x^3-4x^2+2x+1\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

Cociente: $2x^3-4x+4$
Resto: -1

47. En las divisiones de la actividad 46, comprueba su corrección con la propiedad fundamental de la división: *<<el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto>>*.

a) $\left(2x^2+3x-6\right)\cdot(x+1)+7=2x^3+5x^2-3x+1$

b) $\left(3x^3-11x^2+38x-112\right)(x+3)+337=3x^4-2x^3+5x^2+2x+1$

c) $\left(3x^4+3x^2+4x+9\right)(x-2)+14=3x^5-6x^4+3x^3-2x^2+x-4$

d) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^3-4x+4\right)-1=2x^4+x^3-4x^2+2x+1$

48. Calcula aplicando identidades notables:

a) $\left(2x+x^2\right)^2$ $\qquad$ $\left(2x+x^2\right)^2=4x^2+4x^3+x^4$

b) $\left(3x^2-y\right)^2$ $\qquad$ $\left(3x^2-y\right)^2=9x^4-6x^2y+y^2$

c) $\left(x^3-8\right)\left(x^3+8\right)$ $\qquad$ $\left(x^3-8\right)\left(x^3+8\right)=x^6-64$

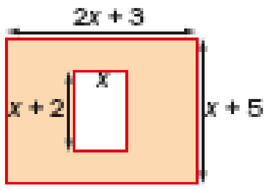
49. El perímetro de un rectángulo mide 50 cm y su diagonal mide x. Calcula la expresión algebraica de su área.

$A=\dfrac{625-x^2}{2}$

50. De un cartón de 2 dm de largo y 3 dm de ancho se cortan cuatro cuadrados en las esquinas para formar una caja. Obtén la expresión algebraica del volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado.

$V=4x^3-10x^2+6x$

51. Escribe la expresión algebraica del área de la región coloreada en la figura.



$A=x^2+11x+15$

Factorización

52. Determina el valor de a para que:

a) $\left(x^2+ax+4\right)$ sea divisible entre $(x+3)$.

$a=\dfrac{13}{3}$

b) La división $\left(x^4+ax^2-5x+6\right):\left(x+3\right)$ tenga resto 4.

$a=\frac{-98}{9}$

c) Al dividir $\left(x^4-3x^3+ax^2-5x+6\right):\left(x-2\right)$ dé resto -2.

$a=\frac{5}{2}$

53. Determina los valores de a y b para que el polinomio $2x^4-3x^3+ax^2-2x+b$ sea divisible por $\left(2x^2-5x+3\right)$.

$a=-6$ y $b=3$

54. ¿Qué valores de a hacen que el polinomio x^2-3x+a tenga raíces enteras? Hay varias soluciones posibles, encuentra al menos dos distintos. ¿Existe una regla general?

En general, si se toma cualquier $n\in\mathbb{Z}$, basta tomar $a=3n-n^2$ y las raíces serán los números enteros $x_1=n$ y $x_2=3-n$.

55. Escribe un polinomio que tenga por raíces $x=3$, $x=2$ y $x=-4$. ¿Puedes escribir otro con el coeficiente del término dominante igual a 3?

$$P(x)=(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+4)=x^3-x^2-14x+24$$

56. Calcula los valores de a y b para que el polinomio $3x^3-2x^2+ax+b$ tenga como raíces $x=2$ y $x=-3$. Calcula la tercera raíz.

$a=-23, b=30$

La tercera raíz es $x=5/3$.

57. ¿Es divisible el polinomio $x^{100}-1$ entre $x-1$? Utiliza el teorema del resto para averiguarlo.

Si que es divisible.

58. Un polinomio cuyo término independiente es 5, ¿Puede tener $x=0$ como raíz?

No puede ser 5.

59. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3+6x^2+3x-10$ $\quad x^3+6x^2+3x-10=(x-1)\cdot(x+5)\cdot(x+2)$

b) $x^3-x^2-8x+12$ $\quad x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$

c) $x^3+10x^2+7x-18$ $\quad x^3+10x^2+7x-18=(x-1)\cdot(x+9)\cdot(x+2)$

d) $x^3-x^2-14x+24$ $\quad x^3-x^2-14x+24=(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)$

e) $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$ $\quad$ $x^4+4x^3-7x^2-22x+24=(x-1)(x-2)(x+4)(x+3)$

f) $x^4-25x+144$ $\quad$ $x^4-25x+144=(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

60. Aplica el teorema de los ceros racionales para factorizar los siguientes polinomios:

a) $2x^3-5x^2-9x+18$

$$2x^3-5x^2-9x+18=2(x+2)(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

b) $6x^3-x^2-2x$

$$6x^3-x^2-2x=6x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

c) $4x^3+16x^2-x-4$

$$4x^3+16x^2-x-4=4(x+4)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

d) $-12x^3+20x^2+23x+5$

$$-12x^3+20x^2+23x+5=-12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

61. Los siguientes polinomios tienen raíces irracionales. Factoriza por Ruffini y encuéntralas utilizando la ecuación:

a) $x^3-3x^2-8x+24$

$$x^3-3x^2-8x+24=(x-3)\left(x^2-8\right)=(x-3)\left(x-\sqrt{8}\right)\left(x+\sqrt{8}\right)$$

b) x^3-2x^2-4x+3

$$x^3-2x^2-4x+3=(x-3)\cdot\left(x^2+x-1\right)=(x-3)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

c) x^3+x^2-8x-6

$$x^3+x^2-8x-6=(x+3)\left(x^2-2x-2\right)=(x+3)\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)$$

d) $x^4+3x^3-x^2-9x-6$

$$x^4+3x^3-x^2-9x-6=(x+1)(x+2)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$$

62. Los siguientes polinomios tienen factores irreducibles. Encuentra su descomposición en factores:

a) x^3+2x^2+2x+4

$x^3+2x^2+2x+4=(x+2)\left(x^2+2\right)$

b) x^3-2x^2-2x-3

$x^3-2x^2-2x-3=(x-3)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

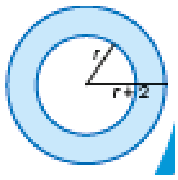
c) x^3-4x^2+7x-6

$x^3-4x^2+7x-6=(x-2)\cdot\left(x^2-2x+3\right)$

d) x^4-1

$x^4-1=(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

63. Escribe la expresión algebraica para el área de una corona circular de radios r y $r+2$. Escribe la expresión factorizada.



$A=4\pi(r+1)$

Expresiones

64. Calcula el dominio de las siguientes expresiones racionales:

a) $\dfrac{3x+2}{x^3-7x+6}$

El dominio será $\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq -3, x\neq 1, x\neq 2\right\}$

b) $\dfrac{x}{x^2-3x}$

El dominio es $\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0, x\neq 3\right\}$

c) $\dfrac{3x+1}{x^2+1}$

El dominio es $\left\{x\in\mathbb{R}\right\}$

65. Simplifica las siguientes expresiones racionales:

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$

$$\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}$$

b) $\frac{2x^2+4x}{2x}$

$$\frac{2x^2+4x}{2x}=(x+4)$$

c) $\frac{x^3-3x+2}{x^3+2x^2-5x-6}$

$$\frac{x^3-3x+2}{x^3+2x^2-5x-6}=\frac{x-1}{x-3}$$

d) $\frac{(2-x)^2-4}{x}$

$$\frac{(2-x)^2-4}{x}=x-4$$

e) $\frac{\left(\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}\right)}{x}$

$$\frac{\left(\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}\right)}{x}=\frac{-1}{3(3+x)}$$

f) $\frac{\left(\frac{x}{2}-1\right)}{x-2}$

$$\frac{\left(\frac{x}{2}-1\right)}{x-2}=\frac{1}{2}$$

66. Realiza las siguientes operaciones:

a) $4-\frac{x+2}{x-3}$

$$4-\frac{x+2}{x-3}=\frac{3x-14}{x-3}$$

b) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+3$

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+3=\frac{3x^2+x-2}{x^2}$$

c) $\frac{1}{x+2}-\frac{3x}{x^2-4}$

$$\frac{1}{x+2}-\frac{3x}{x^2-4}=\frac{-2x-2}{(x-2)(x+2)}$$

d) $\frac{3x+2}{x^2-4x+3}+\frac{3}{x^2-5x+6}$

$$\frac{3x+2}{x^2-4x+3}+\frac{3}{x^2-5x+6}=\frac{3x^2-x-7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

67. Haz estas operaciones y simplifica en lo posible el resultado:

a) $\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x^2+2x-3}{x^2-x}$

$$\frac{x^2}{x+3}\cdot\frac{x^2+2x-3}{x^2-x}=x$$

b) $\frac{x-1}{3x+6}\cdot\frac{x+2}{x-3}\cdot\frac{3x}{x^2-x}$

$$\frac{x-1}{3x+6}\cdot\frac{x+2}{x-3}\cdot\frac{3x}{x^2-x}=\frac{1}{x-3}$$

c) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}:\frac{x-3}{x}$

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}:\frac{x-3}{x}=\frac{x}{x+3}$$

d) $\frac{4x+8}{x^2-4}:\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)$

$$\frac{4x+8}{x^2-4}:\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)=\frac{2(x+2)}{x}$$

Binomio de Newton

68. Calcula los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{5}{2}$ $\qquad \binom{5}{2}=10$

b) $\binom{7}{4}$ $\qquad \binom{7}{4}=35$

c) $\binom{10}{5}$ $\qquad \binom{10}{5}=252$

d) $\binom{12}{3}$ $\qquad \binom{12}{3}=220$

69. Comprueba que $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\binom{4}{3}$ ¿Es válida la igualdad $\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$?

Se puede comprobar directamente:

$$\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{3!0!}=3+1=4$$

$$\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!1!}=4$$

La demostración de la propiedad general es más compleja. Se utiliza que para un número entero cualquiera se cumple que $k!=k\cdot(k-1)!$:

$$\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!m}{\big(m(m-1)!\big)(n-m+1)!}+\frac{n!(n-m+1)}{m!\big((n-m+1)(n-m)!\big)}=$$

$$=\frac{n!m}{m!(n-m+1)!}+\frac{n!(n-m+1)}{m!(n-m+1)!}=\frac{n!\big(\cancel{m}+n-\cancel{m}+1\big)}{m!(n-m+1)!}=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}=\binom{n+1}{m}$$

70. Aplicando el desarrollo del binomio de Newton correspondiente, desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x+3)^3$ $\qquad (x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27$

b) $(2x+3)^4$ $\qquad (2x+3)^4=16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$

c) $\left(3+\sqrt{3}\right)^4$ $\qquad \left(3+\sqrt{3}\right)^4=252+144\sqrt{3}$

d) $\left(2x+\sqrt[3]{x}\right)^6$ $\qquad \left(2x+\sqrt[3]{x}\right)^6=64x^6+192x^{\frac{16}{3}}+240x^{\frac{14}{3}}+160x^4+60x^{\frac{10}{3}}+12x^{\frac{8}{3}}+x^2$

71. ¿Cuál es el coeficiente del término de grado 3, x^3 en el desarrollo de $(2x+4)^5$?

$1280x^3$.

Ecuaciones. Solución e interpretación gráfica

72. ¿Son equivalentes las ecuaciones siguientes?

a) $x-3=0$ y $x^2-9=0$

No.

b) $x+1=0$ y $x^2+x=0$

No.

c) $x+1=4$ y $x^2-6x+9=0$

Si.

d) $\sqrt{2x-1}=x$ y $\frac{x+2}{5}-\frac{x}{2}=\frac{1}{10}$

Si.

73. Indica si $x=-2$ es solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\log(x^2+2)=1$

No

b) $x^2-5x-14=0$

No

c) $\sqrt{-x+6}-x=4$

No

d) $2^{-x}+\cos(\pi x)=5$

Si

74. Escribe dos ecuaciones diferentes que tengan como solución

a) $x=3$

b) $x=-3$, $x=0$ y $x=2$.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo: $2^x=8$ y $2x-3=3$.

b) La ecuación más sencilla es: $x^3+x^2-6x=0$

Otras ecuaciones con las mismas soluciones se obtienen multiplicando este polinomio por otros factores:

$x^4+x^3-6x^2=0$ $\quad\quad$ $(x-1)(x^3+x^2-6x)=x^4-7x^2+6x=0$

Ecuaciones polinómicas

75. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+2}{3}-\frac{x}{2}=1-\frac{2x+3}{6}$ $\quad\quad$ $x=-1$

b) $(x+2)^2=(2x-1)(x+1)-x^2$ $\quad\quad$ $x=\frac{-5}{3}$

c) $\frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{x+1}$ $\quad\quad$ $x=\pm 2$

d) $(x+4)(x-4)=20$ $\quad\quad$ $x=\pm 6$

76. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4-169x^2+3600=0$

$$z^2-169z+3600=0\rightarrow\begin{cases}z=144\rightarrow x=\pm 12\\ z=25\rightarrow x=\pm 5\end{cases}$$

b) $x^4+x^2=4x^2-2$

$$z^2-3z+2=0\rightarrow\begin{cases}z=1\rightarrow x=\pm 1\\ z=2\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

c) $4x^4-37x^2+9=0$

$$4z^2-37z+9=0\rightarrow\begin{cases}z=9\rightarrow x=\pm 3\\ z=\frac{1}{4}\rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$$

d) $x^6-9x^3+8=0$

$$z^2-9z+8=0\rightarrow\begin{cases}z=1\rightarrow x=1\\ z=8\rightarrow x=2\end{cases}$$

77. Resuelve las siguientes ecuaciones sacando factor común:

a) $x^4-5x^3+4x^2=0$

$x^2(x^2-5x+4)=0\rightarrow$ x = 0, x = 1, x = 4

b) $x(x^2-1)+2(x^2-1)=0$

$(x+2)(x^2-1)=0 \rightarrow x=-2,\ x=\pm 1$

c) $(x-3)(x^2+1)+(x-3)^2=(1-x)(x-3)$

$(x-3)(x^2+1)+(x-3)^2=(1-x)(x-3) \rightarrow$ x = 3, x = 1, x = -3

d) $x^3+2x^2-x-2=0$

El factor común es $(x+2)$:

$x^3+2x^2-x-2=0 \rightarrow x=-2,\ x=\pm 1$

78. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando las identidades notables:

a) $x^2-1=0$

$x=\pm 1$

b) $x^2-8x+16=0$

x = 4

c) $(x^2-3)(x^2-4)=0$

$x=\pm\sqrt{3},\ x=\pm 2$

d) $(x^2-4x+4)(x^2+6x+9)=0$

x = 2, x = -3

79. Resuelve las siguientes ecuaciones factorizando por el método de Ruffini:

a) $x^3-7x+6=0$

Soluciones: $x=1, x=2, x=-3$

b) $x^3-3x^2-x+3=0$

Soluciones: $x=1, x=-1, x=3$

c) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

Soluciones: $x=1, x=-1, x=-2, x=3$

d) $2x^4-5x^3+5x-2=0$

Soluciones: $x=1, x=-1, x=2, x=\frac{1}{2}$

80. Halla el radio de una bola de billar con un volumen de 76,6 cm^3.

El radio es 2,63 cm

81. ¿Cuánto deberá valer b para que la ecuación $2x^2+bx+3=0$ tenga exactamente una solución? ¿Y para qué valores de b no hay solución?

Para que tenga sólo una solución: $b=\pm\sqrt{24}$

82. Dada la ecuación $x^2+(m+2)x+(n-1)=0$, se sabe que la suma de sus soluciones es -6 y su producto 8. Calcula los valores de m y n. Calcula también las soluciones de la ecuación.

$m=-8$ y $n=9$

83. El $x\%$ de x es 16, ¿cuánto vale x?

$x=\pm 40$

84. Los lados de un triángulo rectángulo son tres múltiplos de 3 consecutivos. ¿Cuánto miden esos lados?

Los lados del triángulo son 9 cm, 12 cm y 15 cm.

85. Andrea tiene más dinero que Carlos. Si Andrea le diera a Carlos 20 €, los dos tendrán el mismo dinero, y si Carlos le diera a Andrea 22 €, Andrea tendría el doble de dinero que Carlos. ¿Cuánto dinero tienen cada uno?

Andrea tiene 146€ y Carlos 106 €.

Ecuaciones racionales y radicales

86. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales convirtiéndolas en ecuaciones polinómicas. No olvides comprobar las soluciones.

a) $\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}=0$

x = 2, x = 3

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{8x+1}{x^2+x}$

$x=3$

c) $x^3-\frac{1}{x^3}=\frac{15624}{125}$

$x=5$, $x=\frac{-1}{125}$

d) $\frac{x-1}{x}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{2x-3}{x-1}$

$x = \pm 2$

87. La resta de los inversos de dos números consecutivos es 1/30. ¿Cuánto valen estos dos números?

Por tanto los números consecutivos son 5 y 6 o -6 y -5.

88. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales. No olvides comprobar las soluciones:

a) $\sqrt{x-1} = 13$

$x = 170$

b) $\sqrt{7x-3} = 2x-3$

$x = 4$

c) $x + \sqrt{10x-4} = 10$

$x = 4$

d) $\sqrt{x-5} + \sqrt{3x+7} = 10$

$x = 14$

89. Un estanque tiene un grifo que lo llena en seis horas, mientras que otro tarda en llenarlo ocho horas. Además, tiene un desagüe que lo vacía en cuatro horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el estanque si se abren los dos grifos y el desagüe?

Tardará 24 h.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

90. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{3x+1} = 2\sqrt[3]{2}$

$2^{3x+1} = 2\sqrt[3]{2} \rightarrow x = \frac{1}{9}$

b) $4^x + 4^{x+1} = 20 \cdot 4$

$4^x + 4^{x+1} = 20 \cdot 4 \rightarrow x = 2$

c) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$

$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -1$

d) $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} = 21$

$3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} = 21 \rightarrow x = 2$

e) $5^x - \dfrac{1}{5^{x-2}} = 24$

$5^x - \dfrac{1}{5^{x-2}} = 24 \rightarrow x = 2$

f) $9^x - 28 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$

$9^x - 28 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -1$

91. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. No olvides comprobar la validez de las soluciones.

a) $2\log(x-1) = 1 + \log\left(x + \dfrac{1}{10}\right)$

$2\log(x-1) = 1 + \log\left(x + \dfrac{1}{10}\right) \rightarrow x = 12$

b) $3\log(x) + 2 = 2\big(3 - \log(x)\big)$

$3\log(x) + 2 = 2\big(3 - \log(x)\big) \rightarrow x = 10^{4/5}$

c) $\log(x+3) - \log(2) = 2\log(x)$

$\log(x+3) - \log(2) = 2\log(x) \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

d) $\log_{27}(x) + \log_9(x) + \log_3(x) = 7$

$$\log_{27}(x)+\log_9(x)+\log_3(x)=7 \rightarrow x=3^6=729$$

e) $\log(2)+\log(11-x^2)=2\log(5-x)$

$$\log(2)+\log(11-x^2)=2\log(5-x) \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1/3 \end{cases}$$

f) $\log(2)+\log\left(4^{x-2}+9\right)=1+\log\left(2^{x-2}+1\right)$

$$\log(2)+\log\left(4^{x-2}+9\right)=1+\log\left(2^{x-2}+1\right) \rightarrow x=2\,,\; x=4$$

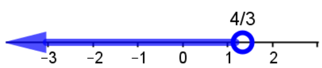
Inecuaciones

92. Resuelve las inecuaciones siguientes y representa el resultado:

a) $3x+7\le 2x+8$

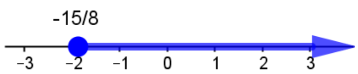
La solución es: $x\le 1 \rightarrow x\in(-\infty,1]$

b) $x-3(x+1)>4x+5$



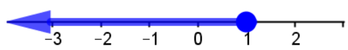
La solución es: $x<4/3 \rightarrow x\in(-\infty,4/3)$

c) $\dfrac{3x-2}{2}<2x+3$



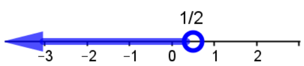
La solución es: $x\ge -15/8 \rightarrow x\in[-15/8,\infty)$

d) $\dfrac{x+3}{5}-\dfrac{2x-1}{3}\le\dfrac{x-1}{15}+2$



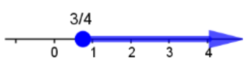
La solución es: $x\le 1 \rightarrow x\in(-\infty,1]$

e) $(x-3)^2>(x+2)^2$



La solución es: $x<1/2 \rightarrow x\in(-\infty,1/2)$

f) $\dfrac{2x^2-1}{2}\ge(x-1)^2$

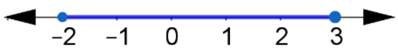


La solución es: $x\ge 3/4 \rightarrow x\in[3/4,\infty)$

93. Resuelve las inecuaciones siguientes y representa el resultado:

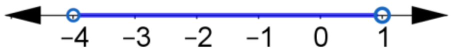
a) $(x+2)(x-3) \leq 0$

Las soluciones son $x \in [-2, 3]$



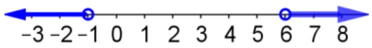
b) $x^2 + 3x - 4 < 0$

Las soluciones son $x \in (-4, 1)$



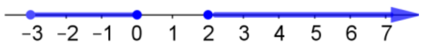
c) $x(x-5) > 6$

Las soluciones son $x \in (-\infty, -1) \cup (6, \infty)$



d) $x(x+3)(x-2) \geq 0$

Las soluciones son $x \in [-3, 0] \cup [2, \infty)$



94. Se mide el lado de un cuadrado, y su valor resulta ser de 13 cm, con un posible error de $\pm 0,2\ \text{cm}$. Determina el intervalo de valores de su área.

Los valores extremos del área son: $A \in [163,84; 174,24]$

Aplicaciones

95. Trayectoria de un objeto. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba a una velocidad de 100 m/s. La ecuación de su trayectoria viene dada por: $h(t) = 100t - 4,9t^2$. ¿Cuánto tardará el objeto en alcanzar una altura de 400 m? ¿Cuánto tiempo tardará en caer al suelo?

Estará a 400 m de altura a los 5,46 s en la subida y a los 14,95 s en la bajada.

Volverá a caer a los 20,41 s.

96. Tamaño del fémur. Según estudios antropométricos estadísticos, la estatura de una persona (E) está relacionada con el tamaño de su fémur (F) mediante la expresión:

Mujeres: $E = 1,94 \cdot F + 72,84$

Hombres: $E = 1,88 \cdot F + 81,31$

a) ¿Cuánto medirá el fémur de una mujer de 170 cm de estatura?
Medirá 50,08 cm

b) ¿Cuánto medirá el fémur de un hombre de la misma estatura?
Medirá 47,18 cm

97. Velocidad de un coche. Un coche se desplaza en línea recta a una velocidad que varía entre 60 km/h y 90 km/h ¿Entre qué distancias desde el punto de partida se encuentra al cabo de diez horas?

Al cabo de 10 horas, la distancia recorrida será $x \in [600, 900]$ km

98. Estudio bacteriológico. Una población de bacterias se duplica cada doce horas. Si inicialmente la colonia tenía 120 individuos, ¿cuánto tiempo tardará en tener más de 12 millones de bacterias?

Tardará 199,32 horas

99. Estudio psicológico. Unos estudios sobre psicología han mostrado que el número de respuestas correctas de una determinada prueba que una persona realiza sigue la ley:

$$N = 40\left(1 - e^{-0.12n}\right)$$

Donde n es el número de veces que se intenta la prueba. ¿Cuántos intentos serán necesarios para tener 30 aciertos?

Se necesitan 12 intentos.

100. Efectividad de un anuncio en tv. La efectividad de los anuncios que se emiten por televisión depende de las veces que lo ve una persona. Una empresa de publicidad estima que, si se mide la efectividad en una escala de 0 a 10, este valor es:

$$E = \frac{n}{3}\left(2 - \frac{n}{30}\right)$$

Donde n es el número de veces que un telespectador ve el anuncio. El anuncio deja de ser efectivo cuando su efectividad es menor que 5,1.

a) ¿Cuántas veces se tiene que visualizar un anuncio para que su efectividad sea de 10?

30 veces

b) ¿Qué intervalo de visualizaciones hacen que el anuncio sea efectivo?

Deberá verse entre 9 y 51 veces para que la efectividad sea superior a 5,1.

101. Costes de fabricación. Una empresa que fabrica coches tiene unos costes fijos de 3,5 millones al año. Además, los costes de producción de x unidades es de $C = 1 + 0,01x$ millones de euros. Si el precio de cada unidad que se vende en el mercado es de 20000 euros cada vehículo:

a) ¿cuántos coches deberá vender para cubrir solo los costes de producción?

100 unidades

b) ¿cuántos coches deberá vender para cubrir el total de costes?

450 vehículos

c) Si vende más de 500 vehículos, ¿a cuánto ascenderán sus beneficios?

0,5 millones de euros.

Un mundo matemático

Caso 1: Encuentra la ecuación que permite la conversión de grados Celsius (°C) y grados Fahrenheit (°F). A continuación, efectúa la conversión de 0, 7, 15 y 30 °C. ¿En qué países se utilizan los grados Fahrenheit?

Si T = 0 °C, entonces T= 32 °F
Si T = 7 °C, entonces T= 44,6 °F
Si T = 15 °C, entonces T= 59 °F
Si T = 30 °C, entonces T= 212 °F

Caso 2: Kilocalorías diarias necesarias para una mujer entre las tres comidas principales.

$$1800 \leq \frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2}x + 200 \leq 2400$$

¿Entre qué valores se encuentran las kilocalorías diarias recomendables para una mujer?

Enunciado

Las kilocalorías diarias necesarias para una mujer oscilan entre un mínimo de 1800 y un máximo de 2100. Se sabe que una chica en el desayuno necesita la mitad de las kcal que en la comida; mientras que en la cena necesita 200 kcal más que en el desayuno. Determina cuántas kilocalorías necesita diariamente en cada una de las tres comidas principales.

Solución

Por tanto, necesita diariamente en la comida entre 800 y 1100 kcal, en el desayuno entre 400 y 500 kcal, y en la cena entre 600 y 750 kcal.

Caso 3: Inversión en dos productos financieros.

$$x + \frac{1}{3}x = 20\,000$$

Enunciado

Una persona invierte en dos productos financieros un total de 20 000 euros. Sabiendo que en uno de ellos invierte la tercera parte que en el otro, ¿cuánto dinero invirtió en cada uno de ellos?

Solución

Invirtió 15 000 y 5 000 euros en estos dos productos financieros.

Caso 4: Teorema de Pitágoras.

$$(4x+5)^2 = x^2 + (3x+13)^2$$

¿Cuántos triángulos hay con estas características?

Enunciado

Calcula las dimensiones de todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 4x+5 y de catetos x y 3x+13.

Solución

El único triángulo rectángulo que verifica estas condiciones es aquel que tiene de hipotenusa 41 y por catetos 9 y 40.

Caso 5: Depreciación del precio de un coche. ¿Qué representa la variable x?

$$p(x) = 22\,000 \cdot 0{,}8^x$$

Realiza preguntas sobre el precio de compra y el precio después de algunos años.

Enunciado

Calcula el precio de compra de este coche. ¿Qué precio tendrá al cabo de cuatro años? ¿Y de ocho años?

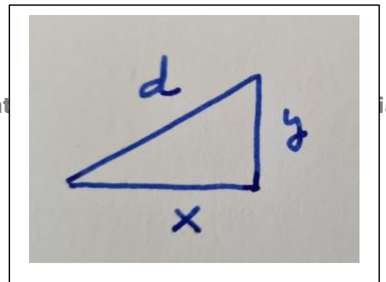
Solución

Al cabo de cuatro años su precio será $9\,011$ euros. Mientras que después de ochos años su precio será $3\,691$ euros.

Caso 6: El tamaño de la pantalla de una tablet o de un televisor viene dado por la longitud de la diagonal de la pantalla medida en pulgadas. ¿A cuántos centímetros equivale una pulgada? Sean x e y las medidas del ancho y alto, respectivamente. Considera las siguientes ecuaciones en este contexto:

Una pulgada equivale a 2,4 cm, es decir, $1'' = 2{,}4\ cm$.

El tamaño de la pantalla viene dado por la diagonal d medida en pulgadas, siendo x e y las medidas del ancho y el alto, respectivamente (ver figura).



Por ejemplo, un formato 16:9 significa que tiene 9 de alto y 16 de ancho, es decir: $\frac{x}{16}=\frac{y}{9}$ o lo que es equivalente 9x=16y.

Por tanto, la fracción $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}$ significa un formato 4:3, es decir, el de una pantalla de 3 de alto y 9 de ancho.

La expresión $10{,}2^2=x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2$ indica por el teorema de Pitágoras que la pantalla tiene de diagonal 10,2 , 3 de ancho y 4 de alto.

