Nombre: ______________________ Curso: ________ Fecha: ____________

1 **Averigua el dominio de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{5-x}}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2-5x-2}}{x}$

f) $f(x) = 3x^2 + x - \sqrt{x} - 2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$

h) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{2x^4-3x^3-3x^2+2x}$

i) $f(x) = \dfrac{2x+|x|}{2x-|x|}$

2 **Encuentra el recorrido de las siguientes funciones con la ayuda de su representación gráfica:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = x^2 - 1$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = \sqrt{x+4}$

e) $f(x) = \dfrac{3-x}{x}$

f) $f(x) = \left|\dfrac{3-x}{x}\right|$

g) $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$

h) $f(x) = \dfrac{1-x}{2-x}$

3 **Estudia el signo de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{2-3x}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

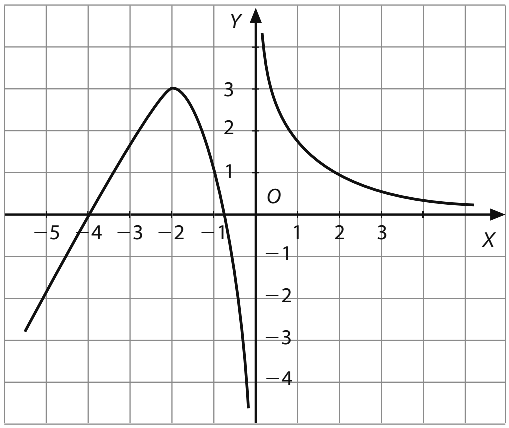
e) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-1}$

4 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:**

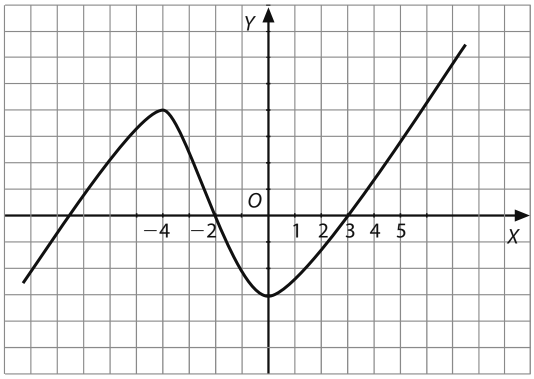
a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = |2x^2 + x - 1|$

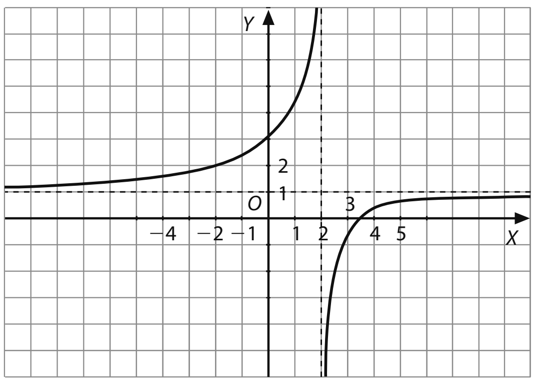
c)



d)



e)



5 **De las siguientes funciones, indica cuáles son simétricas respecto del eje de ordenadas:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{3+x^2}$

d) $f(x) = x^2 + 3$

e) $f(x) = x^3 + x - 1$

f) $f(x) = |x| + x^2$

Nombre: ______________________ Curso: ________ Fecha: ____________

6 **De las funciones anteriores, indica cuáles son simétricas respecto del origen de coordenadas.**

7 **Representa gráficamente las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:**

a) $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 - 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{|x|}{x} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ -|x-1| & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ x+2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = -2x^2 - x + 1$

e) $f(x) = |x^2 + x - 6|$

f) $f(x) = \left| \dfrac{x-1}{x+3} \right|$

8 **Dadas las funciones:**

$f(x) = \dfrac{3-x}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$

Calcula $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y sus respectivos dominios.

9 **Dadas las funciones siguientes: $f(x) = |x-2|$ y $g(x) = 2x + 1$. Calcula $(f+g)(x)$ y su dominio.**

10 **Dadas las funciones:**

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcula $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f/g)(x)$ y sus respectivos dominios.

11 **Dadas las funciones:**

$f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = x - 2$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

12 **Dadas las funciones:**

$f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x^2 - 1$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

13 **Dadas las funciones:**

$f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$ y $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

14 **Dadas las funciones:**

$f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

15 **A partir de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, halla $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ y sus respectivos dominios. ¿Qué observas? ¿Es siempre posible componer funciones?**

16 **Dadas las funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{3-x}{3}$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = x^2 - x - 2$

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{1-3x}$

g) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

Calcula, si existe, su inversa respecto de la composición de funciones.

17 **Dos números naturales suman 15. Expresa analíticamente la función que expresa su producto en función de uno de ellos. Indica su dominio y su recorrido.**

18 **Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x con el fin de hacer una caja sin tapa. Calcula el volumen de la caja en función de x.**

19 **Dada una función afín, se conocen los puntos $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, -3\right)$. Halla su expresión analítica.**

¿Es creciente?

20 **¿Son iguales $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$? ¿Por qué?**

21 **Encuentra una función cuadrática, $f(x)$, que tome los valores que muestra la tabla:**

x	0	2	−1
$f(x)$	1,25	−0,75	6,75

1 ***a)*** Dom $f(x) = (-\infty, 5)$

b) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

d) Dom $f(x) = [-1, 0) \cup (1, +\infty)$

e) Dom $f(x) = \left(-\infty, \frac{-1}{3}\right] \cup \left[2, +\infty\right)$

f) Dom $f(x) = [0, +\infty)$

g) Dom $f(x) = (1, +\infty)$

h) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$

i) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

2 ***a)*** Rec $f(x) = \mathbb{R}$

b) Rec $f(x) = [-1, +\infty)$

c) Rec $f(x) = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

d) Rec $f(x) = [0, +\infty)$

e) Rec $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

f) Rec $f(x) = [0, +\infty)$

g) Rec $f(x) = [-3, +\infty)$

h) Rec $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

3 ***a)*** $f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y $f(x) < 0$ en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$ y $f(x) < 0$ en $(-1, 0) \cup$ $\cup (3, +\infty)$

c) $f(x) > 0$ en $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ y $f(x) < 0$ en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

d) $f(x) > 0$ en $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, y $f(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$

e) $f(x) > 0$ en $(-1, 1)$ y $f(x) < 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

4 ***a)*** $f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{4}\right)$ y estrictamente creciente en $\left(\frac{-1}{4}, +\infty\right)$.

b) $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y estrictamente creciente en $\left(-1, \frac{-1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

c) $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -2)$.

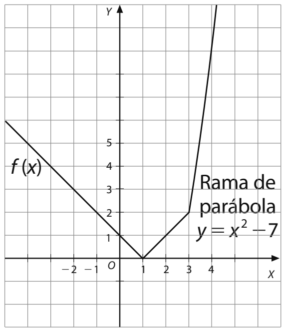
d) $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-4, 0)$.

e) $f(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R} - \{2\}$, que es su dominio.

5 Son simétricas respecto del eje de ordenadas las funciones pares: *c*, *d*, *f*.

6 Son simétricas respecto del origen de coordenadas las funciones impares: *b*.

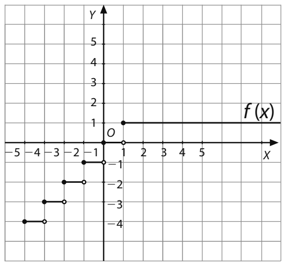
7 ***a)***



Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Rec $f(x) = [0, +\infty)$

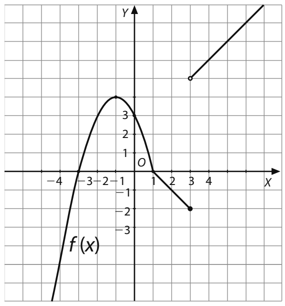
b)



Dom $f(x) = \mathbb{R}$

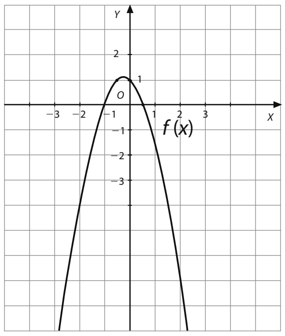
Rec $f(x) =$
$= \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 1\}$

c)



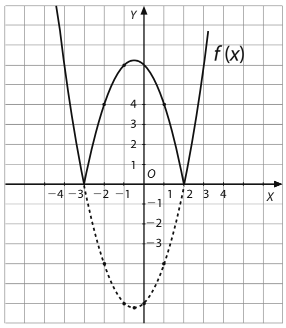
Dom $f(x) = \mathbb{R}$, Rec $f(x) = (-\infty, 4] \cup (5, +\infty)$

d)



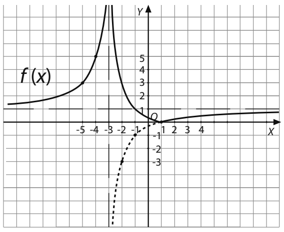
Dom $f(x) = \mathbb{R}$, Rec $f(x) = \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$

e)



Dom $f(x) = \mathbb{R}$, Rec $f(x) = [0, +\infty)$

f)



Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Rec $f(x) = [0, +\infty)$

8 $(f+g)(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x}$

$(f-g)(x) = \dfrac{-x^3 + 2x + 3}{x^2 + x}$

$(f \cdot g)(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1}$

El dominio de las dos primeras es $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

9 $(f+g)(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Dom $f + g = \mathbb{R}$

10
- $(f+g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x - 1} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$

  Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{1\}$
- $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0, x \neq 1 \end{cases}$

  Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{1\}$
- $(f/g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$

  Dom $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{1\}$

11
- $(f \circ g) = \dfrac{3x - 7}{x - 2}$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{2\}$
- $(g \circ f) = \dfrac{x - 1}{x}$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

12
- $(f \circ g) = x$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R}$
- $(g \circ f) = x$

  Dom $(g \circ f) = [-1, +\infty)$

13
- $(f \circ g) = x$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- $(g \circ f) = x$

  Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \{2\}$

14
- $(f \circ g) = x - 1$

  Dom $(f \circ g) = [2, +\infty)$
- $(g \circ f) = \sqrt{x^2 - 1}$

  Dom $(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

15 $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x - 2} - x + 2$ Dom $(f \circ g) = [2, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 2}$ Dom $(g \circ f) = \varnothing$

$g \circ f$ no existe, puesto que el recorrido de $f(x)$, $(-\infty, 1)$, no está incluido en el dominio de $g(x)$, que es $[2, +\infty)$. Siempre que esto sucede no es posible componer las funciones f y g.

16 ***a)*** $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{3 - x}$

b) $f^{-1}(x) = 3 - 3x$

c) $f^{-1}(x) = x^2 + 3$ si $x \geq 0$

d) $f(x) = x^2 - 4$ no es inyectiva.

e) $f(x) = x^2 - x - 2$ no es inyectiva.

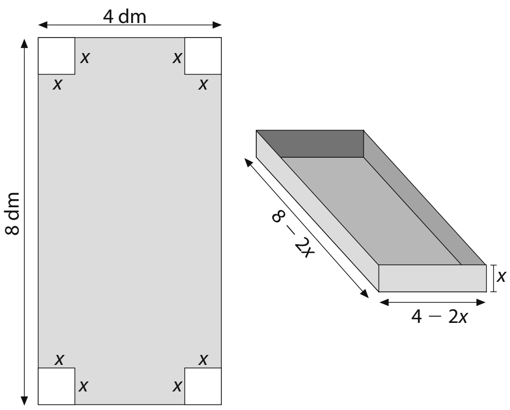
f) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{1 + 3x}$

g) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$

17 $x + y = 15 \Rightarrow x = 15 - x \Rightarrow f(x) = x(15 - x)$

Dom $f = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 15\}$ (Considerando $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$)

18



El lado del cuadrado que se recorta es la altura de la caja, x.

La base tendrá por lados: $8 - 2x$ y $4 - 2x$

Por lo tanto:

$$V(x) = x(8 - 2x)(4 - 2x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$$

19 $f(x) = \dfrac{-22}{5}x - \dfrac{19}{10}$

No es una función creciente, es decreciente.

20 No son iguales puesto que su dominio no es el mismo, Dom $f(x) = \mathbb{R}$ y Dom $g(x) = \mathbb{R} - \{2\}$, a pesar de que en su dominio $g(x) = x + 2$.

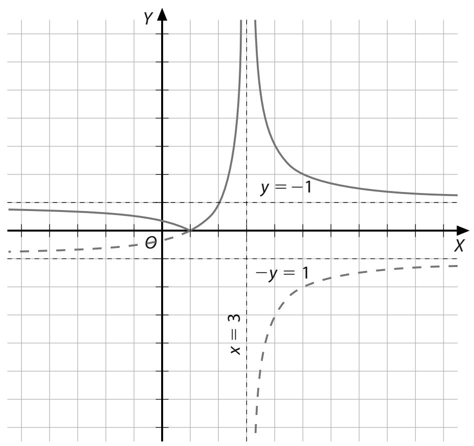
21 $f(x) = 1{,}5\,x^2 - 4x + 1{,}25$

Representación del valor absoluto de una función

Representar la función $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{3-x}\right|$.

Es una función definida en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si se estudia su signo, se obtiene:

	$-\infty$ a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
$x - 1$	−	+	+
$3 - x$	+	+	−
$(x - 1)/(3 - x)$	−	+	−



Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{3-x} & \text{si } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ \dfrac{x-1}{3-x} & \text{si } x \in [1, 3) \end{cases}$$

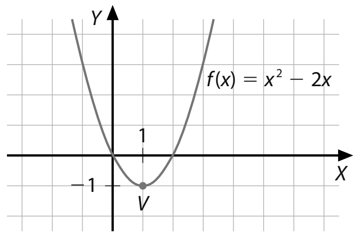
En la figura anterior se representa gráficamente esta función. La gráfica de la función racional se dibuja con trazo punteado, y, a partir de ella, se representa su valor absoluto, procediendo por simetría respecto del eje de abscisas, como se ha hecho anteriormente.

Restricción del dominio de *f* para que exista f^{-1}

Restringir el dominio de $f(x) = x^2 - 2x$ para que admita función inversa respecto de la composición y obtener su expresión $f^{-1}(x)$.

La función $f(x) = x^2 - 2x$ es una función no inyectiva y su representación gráfica es una parábola.

Para conseguir que cada elemento del dominio tenga una sola imagen hay que considerar, o bien el intervalo $(-\infty, 1]$, o el intervalo $[1, +\infty)$, porque 1 corresponde al valor de la abscisa del vértice de la parábola.



Si consideramos el dominio como $[1, +\infty)$, encontramos otra dificultad:

¿Cómo se aísla la variable x de $y = x^2 - 2x$?

Hacemos $x^2 - 2x - y = 0$.

Esta expresión constituye una ecuación de segundo grado que podemos solucionar:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + y}$$

Permutamos ahora las variables x e y:

$$y = 1 \pm \sqrt{1 + x}$$

Esto no es una función, pues, para cada valor de x del dominio, se obtienen dos imágenes, por lo tanto, se debe tomar un solo signo:

$$y = 1 + \sqrt{1 + x} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$$

El dominio de la función inversa hallada es pues el conjunto de valores reales que cumplen $x \geq -1$, es decir $[-1, +\infty)$.

Se observa que este dominio coincide con el recorrido de la función $f(x)$.

Para su cálculo se debe hallar la ordenada del vértice:

$$y = 1 - 2 = -1$$

Como $a = 1 > 0$, su recorrido es $[-1, +\infty)$.